Behandlung der Kegelschnitte

mittels

Linienkoordinaten.

Von

Dr. H. Willig,

Realgymnasiallehrer zu Mainz.

Wissenschaftliche Beilage zum Programm

des Großherzoglichen Realgymnasiums und der Realschule zu Mainz.

Herbst 1888.

Mainz.

Buchdruckerei von H. Prickarts.

1888.

1888. Progr. Nr. 602.

Vorwort.

Vorliegende Arbeit, die eine elementare, systematische Behandlung der Kegelschnitte mittels der Linienkoordinaten im zweiaxigen Systeme enthält, soll eine Ergänzung der elementaren Lehrbücher der analytischen Geometrie bilden und in das Studium der Linienkoordinaten einführen.

Ich glaube damit demjenigen einen Dienst zu thun, der auf die duale Behandlung der Geometrie Gewicht legt.

Auch glaube ich, daß sich einige Aufgaben dieses Heftes schon für den ersten Unterricht in der analytischen Geometrie eignen und gebe es daher der Erwägung anheim, ob es nicht zweckmäßig ist, im Schulunterrichte einen Begriff von den Linienkoordinaten im zweiaxigen Systeme zu geben, die Gleichung des Punktes abzuleiten und bei der Ableitung der Gleichung der Tangente eines Kegelschnittes auf seine Gleichung in Linienkoordinaten aufmerksam zu machen.

Durch die angedeutete Behandlung der analytischen Geometrie würde der Stoff nicht erheblich vergrößert; man wäre aber in der Lage, Aufgaben über Verbindungsgeraden und Schnittpunkte durchsichtiger und kürzer zu lösen, als man es vermag, wenn man nur Punktkoordinaten zuläßt.

Auch könnte man dem Schüler mit Leichtigkeit die Einsicht beibringen, daß eine Kurve ebenso durch gesetzmäßige Bewegung einer Geraden wie durch gesetzmäßige Bewegung eines Punktes entsteht. —

Insbesondere erlaube ich mir auf die hier angewandte Konstruktion der Kegelschnitte (Fig. 6, 8 und 10) aufmerksam zu machen. Obgleich diese Konstruktion sehr alt und viel kürzer ist als die übliche punktweise Erzeugung der Kegelschnitte, wird sie doch nicht, so weit meine Erfahrung reicht, in dem Maße angewandt, als sie es verdient.

Ferner wurde der Transformation der Linienkoordinaten und der Diskussion der Gleichung zweiten Grades, in welcher die veränderlichen Größen Koordinaten von Geraden sind, besondere Aufmerksamkeit zugewandt.

Mainz, im August 1888.

Einleitung.

Gleichung des Punktes, der Punktreihe und des Strahlenbüschels. Harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierecks. Transformation der Linienkoordinaten.

§ 1.

Die mit ihren Vorzeichen versehenen Abschnitte, welche eine Gerade auf den Axen eines gegebenen Koordinatensystems bildet, bestimmen die Lage dieser Geraden eindeutig.

Diese beiden Axenabschnitte haben daher zur Bestimmung der Lage einer Geraden dieselbe Bedeutung, wie die Koordinaten eines Punktes zur Bestimmung der Lage dieses Punktes, und man hätte dieselben als die Koordinaten der Geraden bezeichnen können.

Hätte man auf diese Weise die Koordinaten der Geraden definiert, so würde die Rechnung mit Linienkoordinaten bedeutend erschwert worden sein, und die Analogie zwischen Punkt- und Linienkoordinaten wäre nicht deutlich hervorgetreten.

Man hat daher die negativen, reciproken Werte der Axenabschnitte einer Geraden als deren Koordinaten bezeichnet. Und zwar nennt man den negativen, reciproken Wert des Abschnittes auf der Abscissenaxe die Abscisse und den negativen, reciproken Wert des Abschnittes auf der Ordinatenaxe die Ordinate der Geraden.

Die Abscisse einer Geraden soll künftig stets mit u, die Ordinate derselben mit v bezeichnet werden. Ist die Gerade eine bestimmte, so soll dies durch Indices, die u und v angehängt werden, angedeutet werden.

Die Gerade mit der Abscisse u_i und der Ordinate v_i soll mit $u_i \mid v_i$ und der Punkt mit der Abscisse x_i und der Ordinate y_i soll mit $x_i \mid y_i$ bezeichnet werden.

§ 2.

Lehrsatz. Wenn die Gerade $u_1 | v_1$ durch den Punkt $x_1 | y_1$ geht, so ist der Ausdruck: $x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1$ gleich null.

Beweis. In Fig. 1 sei AB die gegebene Gerade und C der gegebene Punkt.

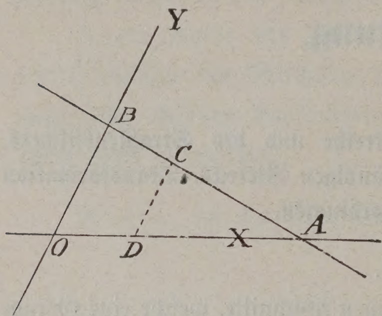


Fig. 1.

Zieht man DC || OY, so ist

$$OA : OB = DA : DC.$$

Da nun $OA = -\frac{1}{u_1}$, $OB = -\frac{1}{v_1}$,

$$DA = OA - OD = -\frac{1}{u_1} - x_1$$

und $DC = y_1$ ist,

so geht die vorstehende Gleichung über in:

$$-\frac{1}{u_1} : -\frac{1}{v_1} = -\left(\frac{1}{u_1} + x_1\right) : y_1 \text{ oder}$$

$$x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1 = 0.$$

§ 3.

Lehrsatz. Wenn die Gerade $u_1 | v_1$ nicht durch den Punkt $x_1 | y_1$ geht, so kann der Ausdruck:

$$x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1$$

auch nicht gleich null sein.

Beweis. Gesetzt, $x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1$ habe den Wert α. Verbindet man den Punkt, in welchem $u_1 | v_1$ die Abscissenaxe schneidet, mit $x_1 | y_1$ und bezeichnet die Ordinate dieser Hilfsgeraden mit v_2, so findet nach dem vorigen § die Beziehung statt:

$$x_1 u_1 + y_1 v_2 + 1 = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der Gleichung $x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1 = \alpha$, so ergiebt sich, daß

$$y_1 (v_1 - v_2) = \alpha.$$

Da y_1 im allgemeinen nicht gleich null ist und v_1 nicht gleich v_2 sein kann, so ist auch α nicht gleich null.

§ 4.

Lehrsatz. Faßt man jede Lösung der Gleichung:

$$x_1 u + y_1 v + 1 = 0,$$

in welcher x_1 und y_1 konstant, u und v veränderlich sind, als Koordinaten einer Geraden in einem beliebigen zweiaxigen Systeme auf, so geht jede dieser Geraden durch den Punkt, der im nämlichen Systeme die Koordinaten $x_1 \mid y_1$ besitzt.

Beweis. Wenn $u_1 \mid v_1$ eine Lösung der gegebenen Gleichung ist, so ist

$$x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1 = 0.$$

Ginge nun $u_1 \mid v_1$ nicht durch den Punkt $x_1 \mid y_1$, so wäre $x_1 u_1 + y_1 v_1 + 1$ nicht null. Dies widerspricht unserer Annahme, also muß die Gerade $u_1 \mid v_1$ durch den Punkt $x_1 \mid y_1$ gehen.

Auf gleiche Weise zeigt man, daß den unendlich vielen Lösungen der Gleichung $x_1 u + y_1 v + 1 = 0$ ebensoviele Geraden des Punktes $x_1 \mid y_1$ entsprechen.

Erklärung. Die Gleichung $x_1 u + y_1 v + 1 = 0$, welche die Koordinaten des Punktes $x_1 \mid y_1$ mit den Koordinaten einer jeden durch ihn gehenden Geraden verbindet, heißt die Gleichung des Punktes $x_1 \mid y_1$.

Die linke Seite dieser Gleichung soll künftig abgekürzt mit P_1, die Gleichung des Punktes selbst also mit $P_1 = 0$ bezeichnet werden.

§ 5.

Aufgabe. Man soll die Gleichung des Punktes finden, der die Verbindungslinie der Punkte $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ in einem bestimmten Verhältnisse (λ) teilt.

Auflösung. Wenn man die Koordinaten des Teilpunktes mit $x \mid y$ bezeichnet, so lautet dessen Gleichung:

$$x u + y v + 1 = 0.$$

Da aber $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, so geht diese Gleichung über in:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} u + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} v + 1 = 0$$

oder $(x_1 u + y_1 v + 1) + \lambda (x_2 u + y_2 v + 1) = 0$,

wofür man abgekürzt schreiben kann

$$P_1 + \lambda P_2 = 0.$$

Zusatz 1. Ist λ positiv, so liegt der Teilpunkt auf der Verbindungslinie selbst; ist λ negativ, so liegt er auf der Verlängerung der Verbindungslinie.

Zusatz 2. Wenn λ eine absolute Zahl ist, so teilt der Punkt

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

die Strecke zwischen $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ innerlich in demselben Verhältnis, in welchem der Punkt $P_1 - \lambda P_2 = 0$ diese Strecke äußerlich teilt.

Die Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_1 + \lambda P_2 = 0$ und $P_1 - \lambda P_2 = 0$ liegen also in Harmonie.

§ 6.

Aufgabe. Man soll die Gleichung des Strahlenbüschels angeben, das durch die beiden Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ bestimmt ist.

Auflösung. Wenn $g_1 = u_1 x + v_1 y + 1, g_2 = u_2 x + v_2 y + 1$ und λ jede positive und negative Zahl bedeutet, so lautet die gesuchte Gleichung $$g_1 + \lambda g_2 = 0.$$

Da nämlich die Koordinaten des Schnittpunktes von $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ diese Gleichung für jeden Wert von λ befriedigen, so geht die unendliche Schar von Geraden, die in

$$g_1 + \lambda g_2 = 0$$

enthalten ist, durch jenen Schnittpunkt.

Zusatz 1. Für $\lambda = -1$ findet man die Gleichung:

$$(u_1 - u_2)\, x + (v_1 - v_2)\, y = 0,$$

welche die Gerade bedeutet, die den Koordinatenanfangspunkt mit dem Schnittpunkte der beiden Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ verbindet.

Wenn ein rechtwinkeliges Koordinatensystem vorausgesetzt wird, so hat diese Gerade die Richtungskonstante:

$$-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.\ ^{*)}$$

Zusatz 2. Die durch die Zahl λ bestimmte Gerade hat die Koordinaten:

$$\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda} \;\Big|\; \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}.$$

Zusatz 3. Nimmt man an, daß

$g_1 = 0$ auf der x-Axe die Strecke p_1,
$g_2 = 0$ „ „ „ „ „ p_2 und
$g_1 + \lambda g_2 = 0$ „ „ „ „ „ p_3

abschneide, so ist

$$p_3 = -\frac{1+\lambda}{u_1 + \lambda u_2} = -\frac{1+\lambda}{\left(-\frac{1}{p_1}\right) + \lambda\left(-\frac{1}{p_2}\right)} = \frac{p_1 + \left(\frac{p_1}{p_2}\lambda\right) p_2}{1 + \left(\frac{p_1}{p_2}\lambda\right)}.$$

---

*) Dieser Differenzenquotient ist von fundamentaler Bedeutung beim Uebergang von Linienkoordinaten zu Punktkoordinaten, und wir werden mehrmals Gelegenheit haben, denselben anzuwenden.

Hieraus folgt, daß der Strahl $g_1 + \lambda g_2 = 0$ die Strecke zwischen den Punkten, in denen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ die x-Axe schneiden, im Verhältnis $\frac{p_1}{p_2} \lambda$ teilt.

Ebenso zeigt man, daß der Strahl $g_1 - \lambda g_2 = 0$ die Strecke zwischen den Punkten, in denen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ die x-Axe schneiden, im Verhältnis $-\frac{p_1}{p_2} \lambda$ teilt.

Zusatz 4. Faßt man die Ergebnisse des letzten Zusatzes zusammen, so findet man, daß die Strahlen $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_1 + \lambda g_2 = 0$ und $g_1 - \lambda g_2 = 0$ aus der x-Axe vier harmonische Punkte ausschneiden, und daß mithin diese Strahlen selbst in Harmonie liegen, und zwar ist

$g_1 = 0$ dem Strahle $g_2 = 0$
und $g_1 + \lambda g_2 = 0$ „ „ $g_1 - \lambda g_2 = 0$
konjugiert.

§ 7.

Aufgabe. Es sind die Punkte A_1 $(x_1 \mid y_1)$, A_2 $(x_2 \mid y_2)$, A_3 $(x_3 \mid y_3)$ und A_4 $(x_4 \mid y_4)$ gegeben; man soll die Gleichung des Schnittpunktes der beiden Geraden $\overline{A_1 A_2}$ und $\overline{A_3 A_4}$ finden.

Auflösung. Weil die Allgemeinheit des Resultats nicht beeinträchtigt wird, soll das Koordinatensystem als rechtwinkelig vorausgesetzt werden.

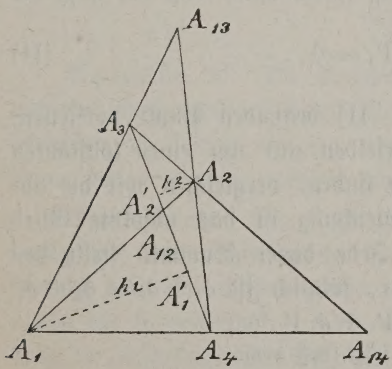


Fig. 2.

Die gegebenen Punkte mögen die in Fig. 2 angegebene Lage haben, und der Punkt, dessen Gleichung zu bestimmen ist, werde mit A_{12} bezeichnet.

Da A_{12} auf der Geraden $\overline{A_1 A_2}$ liegt, ist seine Gleichung von der Form

$$P_1 + \lambda P_2 = 0,$$

wo $\lambda = \frac{\overline{A_1 A_{12}}}{\overline{A_{12} A_2}}$, P_1 und P_2 die linken Seiten der Gleichungen der Punkte A_1 und A_2.

Um den Wert von λ zu finden, fälle man von A_1 und A_2 die Lote auf die Gerade $\overline{A_3 A_4}$.

Da alsdann $\triangle A_{12} A'_1 A_1 \sim \triangle A_{12} A'_2 A_2$, so ist

$$\overline{A_1 A_{12}} : \overline{A_{12} A_2} = h_1 : h_2.$$

Erweitert man den Bruch $\frac{h_1}{h_2}$ mit $\overline{A_3 A_4}$, so wird

$$\lambda = h_1 . \overline{A_3 A_4} : h_2 . \overline{A_3 A_4},$$

worin $h_1 . \overline{A_3 A_4}$ den doppelten Inhalt des Dreiecks $A_1 A_3 A_4$ und $h_2 . \overline{A_3 A_4}$ den doppelten Inhalt des Dreiecks $A_2 A_3 A_4$ bedeutet.

Die Maßzahl für die Flächeneinheiten

des Dreiecks $A_2 A_3 A_4$ werde mit δ_1, die
" " $A_1 A_3 A_4$ " " δ_2, "
" " $A_1 A_2 A_4$ " " δ_3 und die
" " $A_1 A_2 A_3$ " " δ_4 bezeichnet.

δ_1, δ_2, δ_3 und δ_4 sind Zahlen, die sich aus den Koordinaten der gegebenen Punkte berechnen lassen, und zwar ist:

$2\,\delta_1$ der absolute Wert von $x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)$,
$2\,\delta_2$ " " " " $x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4)$,
$2\,\delta_3$ " " " " $x_4(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1)$ und
$2\,\delta_4$ " " " " $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$.

Bei der angenommenen Lage der vier Punkte ist λ eine positive Zahl; die Gleichung von A_{12} lautet demnach:

$$P_1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} P_2 = 0 \text{ oder } \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

Durch eine ähnliche Betrachtung findet man, daß A_{12} auch die Gleichung

$$\delta_3 P_3 + \delta_4 P_4 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

besitzt.

Weil die Gleichungen (I) und (II) denselben Punkt vorstellen, so können sich die linken Seiten derselben nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Um diesen zu finden, vergleichen wir die absoluten Glieder. In der ersten Gleichung ist das absolute Glied $\delta_1 + \delta_2$, in der zweiten $\delta_3 + \delta_4$. Jede dieser Summen stellt den Inhalt des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ vor, folglich ist $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$.

Es ist also $\delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 \equiv \delta_3 P_3 + \delta_4 P_4$.*)

Zusatz. Aus der letzten Identität folgt, daß auch

$$\delta_1 P_1 - \delta_3 P_3 \equiv -(\delta_2 P_2 - \delta_4 P_4) \text{ und}$$
$$\delta_1 P_1 - \delta_4 P_4 \equiv -(\delta_2 P_2 - \delta_3 P_3), \text{ d. h.}$$

$\delta_1 P_1 - \delta_3 P_3 = 0$ stellt denselben Punkt vor wie $\delta_2 P_2 - \delta_4 P_4 = 0$, und ebenso stellt $\delta_1 P_1 - \delta_4 P_4 = 0$ denselben Punkt vor wie $\delta_2 P_2 - \delta_3 P_3 = 0$, und zwar bedeuten die beiden ersten Gleichungen den Punkt A_{13} und die beiden letzten den Punkt A_{14}.

---

*) Vergl. Baltzer, Analyt. Geometrie, § 28, Art. 7.

Die linken Seiten der Gleichungen für A_{12}, A_{13} und A_{14} mögen mit P_{12} resp. P_{13} und P_{14} bezeichnet werden. Es ist dann

III. . . . . $\lambda_1 P_{12} \equiv \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 \equiv \delta_3 P_3 + \delta_4 P_4 = 0$

IV. . . . . $\lambda_2 P_{13} \equiv \delta_1 P_1 - \delta_3 P_3 \equiv -(\delta_2 P_2 - \delta_4 P_4) = 0$ und

V. . . . . $\lambda_3 P_{14} \equiv \delta_1 P_1 - \delta_4 P_4 \equiv -(\delta_2 P_2 - \delta_3 P_3) = 0.$

Addiert und subtrahiert man je zwei dieser Gleichungen, so findet man die Gleichungen von 6 Punkten, von denen jeder mit 3 anderen der Figur in Harmonie liegt.

So ist z. B.

$$\lambda_1 P_{12} - \lambda_2 P_{13}, \equiv \delta_2 P_2 + \delta_3 P_3 = 0.$$

Dieser Punkt liegt auf der Geraden $\overline{A_{12} A_{13}}$ und auf $\overline{A_2 A_3}$ und zwar teilt er die Strecke $\overline{A_2 A_3}$ innerlich im Verhältnisse von $\frac{\delta_3}{\delta_2}$. Der Punkt A_{14} teilt, wie Gleichung V zeigt, dieselbe Strecke äußerlich im Verhältnisse von $\frac{\delta_3}{\delta_2}$. Mithin liegen die Punkte $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_{14} = 0$ und $\lambda_1 P_{12} - \lambda_2 P_{13} = 0$ in Harmonie.

In ähnlicher Weise lassen sich sämtliche harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierecks aus den symmetrisch gebauten Gleichungen III bis V folgern.

Transformation der Linienkoordinaten.

§ 8.

Aufgabe 1. Die Koordinaten einer Geraden sind in bezug auf ein schiefwinkeliges Axensystem gegeben; man soll die Koordinaten derselben in bezug auf ein anderes System angeben, dessen Axen denen des gegebenen parallel laufen.

Auflösung. Der Anfangspunkt des neuen Systems habe in bezug auf das ursprüngliche die Koordinaten $a \mid b$. Die gegebene Gerade habe im ursprünglichen Systeme die Koordinaten $u \mid v$, im neuen die Koordinaten $U \mid V$. Ein beweglicher Punkt dieser Geraden habe im ursprünglichen Systeme die Koordinaten $x \mid y$, im neuen die Koordinaten $X \mid Y$.

Im ursprünglichen Systeme hat die gegebene Gerade die Gleichung

$$u x + v y + 1 = 0.$$

Daraus wird die Gleichung für das neue System abgeleitet, indem man, wie bekannt,

$$x = X + a \text{ und } y = Y + b \text{ setzt.}$$

Man findet:

$$u(X + a) + v(Y + b) + 1 = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{u}{au + bv + 1} X + \frac{v}{au + bv + 1} Y + 1 = 0,$$

woraus ersichtlich ist, daß

$$U = \frac{u}{au + bv + 1} \text{ und } V = \frac{v}{au + bv + 1} \quad \ldots . \text{(I)}$$

Dieselben Beziehungen findet man für jede Gerade der Ebene.

Für den Punkt, der im ursprünglichen Systeme die Gleichung

$$x_1 u + y_1 v + 1 = 0$$

besitzt, findet man die Gleichung im neuen Systeme, indem man die Gleichungen (I) nach u und v löst und die Werte in die letzte Gleichung einträgt. Es ist zu setzen:

$$u = \frac{U}{-aU - bV + 1} \text{ und } v = \frac{V}{-aU - bV + 1.}$$

Aufgabe 2. Von einem schiefwinkeligen Systeme zu einem anderen schiefwinkeligen Systeme überzugehen, das mit dem ersteren den Anfangspunkt gemeinsam hat.

Auflösung. Eine bestimmte Gerade der Ebene möge im ursprünglichen Systeme die Koordinaten $u \mid v$, im neuen die Koordinaten $U \mid V$ haben. Ein beweglicher Punkt dieser Geraden habe im alten Systeme die Koordinaten $x \mid y$, im neuen die Koordinaten $X \mid Y$.

Der Anfangspunkt sei O.

Ox und Oy seien die Axen des alten, OX und OY die Axen des neuen Systems; ferner sei $xOX = \alpha$, $XOy = \alpha_1$, $xOY = \beta$, $YOy = \beta_1$ und $xOy = \varphi$*).

Man erhält nun die Gleichung der Geraden in bezug auf das neue System, indem man in der Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ für

$$x = \frac{X \sin \alpha_1 + Y \sin \beta_1}{\sin \varphi} \text{ und für } y = \frac{X \sin \alpha + Y \sin \beta}{\sin \varphi} \text{ setzt.}$$

Man findet

$$\frac{X \sin \alpha_1 + Y \sin \beta_1}{\sin \varphi} u + \frac{X \sin \alpha + Y \sin \beta}{\sin \varphi} v + 1 = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{u \sin \alpha_1 + v \sin \alpha}{\sin \varphi} X + \frac{u \sin \beta_1 + v \sin \beta}{\sin \varphi} Y + 1 = 0.$$

---

*) Zwei dieser fünf Winkel sind von den übrigen drei abhängig; denn es ist $\alpha_1 + \alpha = \varphi$ und $\beta_1 + \beta = \varphi$.

Daraus folgt, daß

$$U = \frac{u \sin \alpha_1 + v \sin \alpha}{\sin \varphi} \text{ und } V = \frac{u \sin \beta_1 + v \sin \beta}{\sin \varphi}.$$

Zusatz. Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist $\sin \varphi = 1$, $\sin \alpha_1 = \sin (90-\alpha) = \cos \alpha$ und $\sin \beta_1 = \sin (90-\beta) = \cos \beta$, und es ergiebt sich, daß

$$U = u \cos \alpha + v \sin \alpha,\ V = u \cos \beta + v \sin \beta.$$

Löst man diese Gleichungen nach u und v, so resultiert

$$u = \frac{U \sin \beta - V \sin \alpha}{\sin \varphi_1} \text{ und } v = \frac{-U \cos \beta + V \cos \alpha}{\sin \varphi_1},$$

wo φ_1 der Winkel ist, den die neuen Axen mit einander bilden.

Aufgabe 3. Die Koordinaten einer Geraden sind bezüglich eines schiefwinkeligen Systems gegeben; man soll dieselben in bezug auf ein anderes schiefwinkeliges System angeben, dessen Anfangspunkt im ursprünglichen Systeme die Koordinaten a | b besitzt.

Auflösung. Unter Beibehaltung der in Aufgabe 2 eingeführten Bezeichnungen ergeben sich die Transformationsformeln:

$$U = \frac{u \sin \alpha_1 + v \sin \alpha}{(a u + b v + 1) \sin \varphi},\ V = \frac{u \sin \beta_1 + v \sin \beta}{(a u + b v + 1) \sin \varphi}.$$

Der Kreis.

§ 9.

Definition. Der Kreis ist der geometrische Ort aller Geraden, die von einem gegebenen Punkte denselben Abstand haben.

Aufgabe 1. Man soll die Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten angeben, wenn das Koordinatensystem als rechtwinkelig vorausgesetzt wird.

Auflösung. Der Radius des Kreises sei r, die Koordinaten seines Centrums seien a | b.

Wenn man die Koordinaten von irgend einer Tangente des Kreises mit u | v bezeichnet, so lautet ihre Gleichung $u x + v y + 1 = 0$. Von dieser hat der Punkt a | b den Abstand $\frac{u a + v b + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$. Da derselbe gleich r ist, so lautet die gesuchte Gleichung folgendermaßen:

$$r = \frac{a u + b v + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \text{ oder}$$

$$r^2 (u^2 + v^2) = (a u + b v + 1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Hat der gegebene Punkt, welcher Centrum des Kreises ist, die Koordinaten 0 | 0, so nimmt die Kreisgleichung die Form an:

$$r^2 (u^2 + v^2) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Ist die Ordinatenaxe Tangente an den Kreis und liegt sein Centrum auf der positiven Seite der x-Axe, so ist in Gleichung (I) für $a = + r$ und für $b = 0$ zu setzen. Die Kreisgleichung hat in diesem Falle die Form:

$$r^2 v^2 = 2 r u + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

Anmerkung. Im Folgenden soll das Koordinatensystem, falls es nicht näher beschrieben ist, als rechtwinkelig vorausgesetzt werden, und unseren Untersuchungen über den Kreis wollen wir Gleichung (II) zu Grunde legen.

Aufgabe 2. Die Bedingung anzugeben, unter der die Gerade $u_1 \mid v_1$ den Kreis $r^2 (u^2 + v^2) = 1$ schneidet oder ganz außerhalb desselben liegt.

Auflösung. Die gesuchte Bedingung ergiebt sich, indem wir untersuchen, welchen Wert die linke Seite der auf null gebrachten Kreisgleichung annimmt, wenn wir statt u und v die Koordinaten der gegebenen Geraden eintragen.

Der Ausdruck $r^2 (u_1^2 + v_1^2) - 1$ werde mit K bezeichnet, und die zu $u_1 \mid v_1$ parallele Tangente, welche dieselben Teile der Axen schneidet wie $u_1 \mid v_1$, möge die Koordinaten $u \mid v$ besitzen.

Setzt man nun $u_1 = \lambda u$, so ist auch $v_1 = \lambda v$, und es wird:

$$K = r^2 \lambda^2 (u^2 + v^2) - 1 = \lambda^2 [r^2 (u^2 + v^2) - 1] + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 1.$$

Wenn $u_1 \mid v_1$ den Kreis schneidet, so ist der absolute Wert von $u_1 >$ der absolute Wert von u und ebenso der absolute Wert von $v_1 >$ der absolute Wert von v. Es ist also $\lambda > 1$ und mithin K positiv.

Liegt $u_1 \mid v_1$ ganz außerhalb des Kreises, so ist der absolute Wert von $u_1 <$ als der absolute Wert von u.

Mithin ist $\lambda < 1$, also K negativ.

Aufgabe 3. Die Richtungskonstante und Gleichung der Geraden zu finden, welche vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte der Tangente $u_1 \mid v_1$ gezogen ist.

Auflösung. Der Berührungspunkt der gegebenen Tangente ist der Punkt, in dem sie von einer sehr benachbarten Kreistangente geschnitten wird. Die Koordinaten der letzteren, die mit $u_2 \mid v_2$ be-

zeichnet werden mögen, sind also nur sehr wenig von denen der gegebenen Tangente verschieden.

Nach § 6 Zusatz 1 ist die gesuchte Richtungskonstante gleich $-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}$. Beachtet man aber, daß $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ als Tangenten die Bedingungen erfüllen:

$$r^2 (u_1^2 + v_1^2) = 1 \text{ und } r^2 (u_2^2 + v_2^2) = 1,$$

so findet man durch Subtraktion dieser Gleichungen

$$r^2 (u_1 + u_2)(u_1 - u_2) + r^2 (v_1 + v_2)(v_1 - v_2) = 0$$

oder

$$-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = \frac{v_1 + v_2}{u_1 + u_2}.$$

Aus der rechten Seite dieser Gleichung folgert man, indem man $v_2 = v_1$ und $u_2 = u_1$ setzt, daß die zu suchende Richtungskonstante $\frac{v_1}{u_1}$ und die zu suchende Gleichung $y = \frac{v_1}{u_1} x$ ist.

Aufgabe 4. Die Koordinaten des Berührungspunktes der Kreistangente $u_1 \mid v_1$ zu finden.

Auflösung. Dieselben ergeben sich, indem man das System der beiden Gleichungen:

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0, \; y = \frac{v_1}{u_1} x$$

nach x und y löst. Man findet, daß

$$x = -\frac{u_1}{u_1^2 + v_1^2} = -r^2 u_1 \text{*) und}$$

$$y = -\frac{v_1}{u_1^2 + v_1^2} = -r^2 v_1.$$

Zusatz. Quadriert man die beiden letzten Gleichungen und addiert sie alsdann, so ergiebt sich:

$$x^2 + y^2 = r^2 [r^2 (u_1^2 + v_1^2)] = r^2,$$

welches die Mittelpunktsgleichung des Kreises für Punktkoordinaten ist.

Aufgabe 5. Man soll die Bedingung angeben, unter der zwei gegebene Geraden mit den beiden von ihrem Schnittpunkte an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangenten in Harmonie sind.

Auflösung. Der gegebene Kreis habe die Gleichung $r^2 (u^2 + v^2) - 1 = 0$, und die gegebenen Geraden mögen die Koordinaten $u_1 \mid v_1$ resp. $u_2 \mid v_2$ besitzen.

*) $r^2 (u_1^2 + v_1^2)$ hat nach Seite 14 den Wert 1.

Die Koordinaten der in Betracht kommenden Tangenten haben die Form $\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda} \Big| \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}$, wo λ eine Zahl ist, die sich ergiebt, indem man diese Ausdrücke an Stelle von u und v in die Kreisgleichung einträgt.

Man findet zur Bestimmung von λ die Gleichung

$$r^2 \left[\left(\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda} \right)^2 + \left(\frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda} \right)^2 \right] = 1$$

oder, indem man nach Potenzen von λ ordnet:

$$r^2 (u_1^2 + v_1^2) - 1 + 2\lambda [r^2 (u_1 u_2 + v_1 v_2) - 1] + \lambda^2 [r^2 (u_2^2 + v_2^2) - 1] = 0.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte für λ und demgemäß auch zwei Tangenten, welche beide real oder imaginär sein können.

Wenn die Werte für λ entgegengesetzt gleich werden, so sind die betreffenden Tangenten mit den gegebenen Geraden in Harmonie.

Dieser Fall tritt ein, wenn der Koeffizient von λ in obiger Gleichung verschwindet. Die gesuchte Bedingung lautet demnach:

$$r^2 (u_1 u_2 + v_1 v_2) - 1 = 0.$$

Zusatz. Ist diese Bedingung erfüllt, so werden die Werte von λ, welche die Koordinaten der beiden vom Schnittpunkte der gegebenen Geraden ausgehenden Tangenten liefern, aus der Gleichung

$$\lambda = \pm \sqrt{- \frac{r^2 (u_1^2 + v_1^2) - 1}{r^2 (u_2^2 + v_2^2) - 1}}$$ gefunden.

Hieraus ist ersichtlich, daß die Werte von λ nur dann real werden, wenn die eine Gerade den Kreis schneidet, während die andere ganz außerhalb desselben liegt; denn nur in diesem Falle sind die Ausdrücke $r^2 (u_1^2 + v_1^2) - 1$ und $r^2 (u_2^2 + v_2^2) - 1$ verschiedenen Zeichens, mithin der Radikand positiv.

Aufgabe 6. Von jedem außerhalb eines gegebenen Kreises liegenden Punkte einer Geraden sind die beiden Tangenten an diesen Kreis gezogen und der zur gegebenen Geraden konjugierte, vierte harmonische Strahl konstruiert.

Man soll den Ort dieses vierten harmonischen Strahles angeben.

Auflösung. Die zu konstruierende Gerade möge die Koordinaten $u \mid v$ besitzen.

Wenn dieselbe mit $u_1 \mid v_1$ und den beiden Tangenten, die vom Schnittpunkte zwischen $u_1 \mid v_1$ und $u \mid v$ gezogen werden können, in

Harmonie sein soll, so muß nach der vorhergehenden Aufgabe die Bedingung erfüllt sein:

$$r^2 (u_1 u + v_1 v) - 1 = 0$$

oder

$$(-r^2 u_1) u + (-r^2 v_1) v + 1 = 0.$$

Jedes Wertepaar für u und v liefert eine Gerade der verlangten Art. Da es aber unendlich viele Lösungen der letzten Gleichung giebt, so sind auch unendlich viele Geraden der verlangten Art vorhanden. Dieselben gehen sämtlich durch den Punkt $-r^2 u_1 \mid -r^2 v_1$, welcher der Pol von $u_1 \mid v_1$ genannt wird.

Ferner wird die Gerade $u_1 \mid v_1$ die Polare des Punktes $-r^2 u_1 \mid -r^2 v_1$ genannt.

Zusatz 1. Wenn man die Koordinaten des Poles von $u_1 \mid v_1$ mit $x_1 \mid y_1$ bezeichnet, so finden die Beziehungen statt:

$$x_1 = -r^2 u_1 \; , \; y_1 = -r^2 v_1 \text{ und}$$

$$u_1 = -\frac{x_1}{r^2} \; , \; v_1 = -\frac{y_1}{r^2}.$$

Zusatz 2. Wird $u_1 \mid v_1$ zur Tangente, so werden die Koordinaten des Poles dieser Geraden gleich denen des Berührungspunktes (Aufg. 4). Der Pol einer Kreistangente ist mithin ihr Berührungspunkt.

Aus den letzten Gleichungen folgt ferner, daß die Polare eines Kreispunktes seine Tangente ist.

Aufgabe 7. Auf Grund der Gleichungen $x_1 = -r^2 u_1$, $y_1 = -r^2 v_1$ den Pol der Geraden $u_1 \mid v_1$ zu konstruieren.

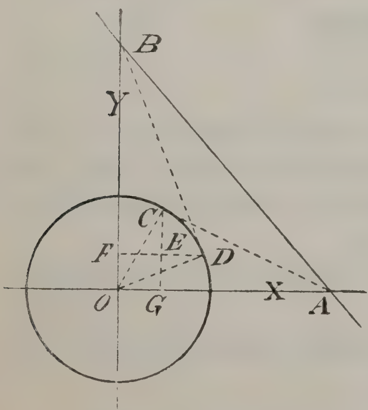


Fig. 3.

Auflösung. In Fig. 3 sei AB die gegebene Gerade. Wenn man dann von A und B die Tangenten AC und BD zieht, von C ein Lot auf die x-Axe und von D ein Lot auf die y-Axe fällt, so ist der Schnittpunkt (E) dieser Lote der gesuchte Pol.

Weil nämlich $\overline{OC}^2 = \overline{OG} \, . \, \overline{OA}$, so ist

$$r^2 = x_1 \, . \, \frac{-1}{u_1} \text{ oder } x_1 = -r^2 u_1,$$

und weil ferner $\overline{OD}^2 = \overline{OF} \, . \, \overline{OB}$, so ist

$$r^2 = y_1 \frac{-1}{v_1} \text{ oder } y_1 = -r^2 v_1.$$

Eine ähnliche Konstruktion ergiebt sich, wenn A oder A und B in den Kreis fallen.

Aufgabe 8. Die Länge (t) der Kreistangente $u_1 \mid v_1$ und die Länge der zugehörigen Subtangente (s_t), Normale (n) und der Subnormale (s_n) zu finden.

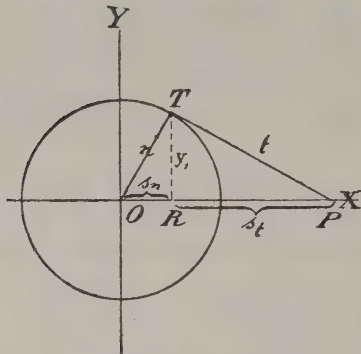


Fig. 4.

Auflösung. Nach Fig. 4 ist

1. $s_t = OP - OR = -\frac{1}{u_1} - x_1$ *)

$$= \frac{-1}{u_1} + r^2 u_1 = \frac{r^2 u_1^2 - 1}{u_1}$$

$$= \frac{-r^2 v_1^2}{u_1},$$

2. $s_n = \frac{y_1^2}{s_t} = \frac{r^4 v_1^2 u_1}{-r^2 v_1^2}$

$$= -r^2 u_1 = x_1,$$ **)

3. $t = \sqrt{(s_n + s_t)\, s_t} =$

$$\sqrt{\frac{-1}{u_1} \cdot \frac{-r^2 v_1^2}{u_1}} = \frac{r v_1}{u_1}$$ und

4. $n = \sqrt{(s_n + s_t)\, s_n} = \sqrt{-\frac{1}{u_1} \cdot (-r^2 u_1)} = r.$

Die Parabel.

§ 10.

Definition. Die Parabel ist der geometrische Ort des einen Schenkels eines rechten Winkels, dessen anderer Schenkel durch einen festen Punkt geht, und dessen Scheitel sich auf einer festen Geraden bewegt.

Der feste Punkt heißt Brennpunkt und die feste Gerade Scheiteltangente der Parabel.

Aufgabe 1. Man soll die Gleichung der Parabel in Linienkoordinaten finden.

---

*) $x_1 \mid y_1$ sind die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangente $u_1 \mid v_1$.

**) Weil die Subnormale gleich der Abscisse des Berührungspunktes ist, geht die Normale jedes Kreispunktes durch das Centrum des Kreises.

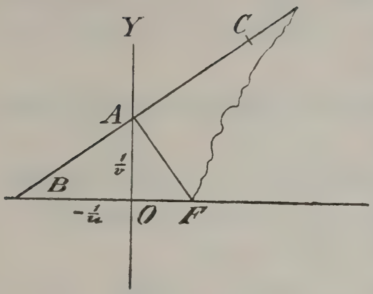


Fig. 5.

Auflösung. In Fig. 5 sei OY die feste Gerade, F der feste Punkt, FA der eine Schenkel des sich bewegenden rechten Winkels und AC der andere Schenkel.

Bezüglich des Koordinatensystems, dessen y-Axe die feste Gerade, und dessen x-Axe das von F auf OY gefällte Lot ist, möge $\overline{AC}$ die Koordinaten $u \mid -v$ und F die Koordinaten $\frac{p}{2} \mid 0$ besitzen.

Weil nun $OA^2 = BO \cdot OF$ ist, so ergiebt sich, indem man für $OA = \frac{1}{v}$ und für $BO = \frac{1}{u}$ *) setzt, die Gleichung

$$\left(\frac{1}{v}\right)^2 = \frac{1}{u} \cdot \frac{p}{2} \text{ oder}$$

$$p\, v^2 = 2\, u.$$

Aufgabe 2. Man soll die Parabel $p\, v^2 = 2\, u$ zeichnen und diskutieren.

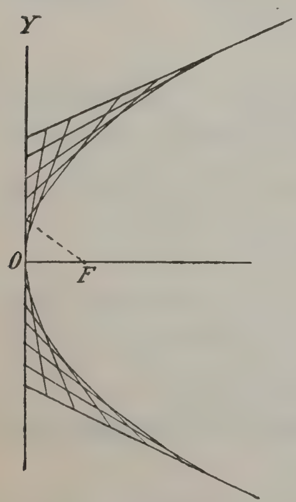


Fig. 6.

a. Konstruktion.

Die einfachste Konstruktion der Parabel beruht auf der hier gegebenen Definition derselben; man braucht nur einige Tangenten zu konstruieren, welche die feste Gerade in der Nähe von O schneiden.

b. Diskussion.

Wenn man die Parabelgleichung in der Form $v = \pm\sqrt{\frac{2\,u}{p}}$ schreibt, so ersieht man:

1. daß v nur dann real wird, wenn u positiv ist, d. h. wenn die Tangente die negative Seite der x-Axe schneidet,

*) BO = — OB.

2. daß zu jedem positiven Werte von u zwei entgegengesetzt gleiche Werte von v gehören, d. h. daß die Parabel symmetrisch zur x-Axe liegt;
3. daß die absoluten Werte von v gleichzeitig mit denen von u ab- und zunehmen;
4. daß zu einem unendlich kleinen Werte von u auch 2 unendlich kleine Werte von v gehören, d. h. daß die Parabel sich mit zwei Zweigen ins Unendliche erstreckt, und
5. daß u = o, v = o genügt, d. h. daß die Parabel von der unendlich fernen Geraden der Ebene berührt wird.

Aufgabe 3. Man soll die Richtungskonstante der Geraden finden, die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte der Parabeltangente $u_1 \mid v_1$*) gezogen ist.

Auflösung. Angenommen $u_2 \mid v_2$ wäre eine zweite Tangente der Parabel.

Die Koordinaten von $u_1 \mid v_1$ befriedigen die Gleichung $p v_1^2 = 2 u_1$ und die von $u_2 \mid v_2$ die Gleichung $p v_2^2 = 2 u_2$.

Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraktion:

$$p (v_1^2 - v_2^2) = 2 (u_1 - u_2) \text{ oder}$$

$$-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = \frac{-p (v_1 + v_2)}{2}.$$

Nach § 6 Zusatz 1 hat die Richtungskonstante der Geraden, die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Schnittpunkte der Tangenten $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ gezogen ist, den Wert $-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}$. Dafür kann man nach vorstehender Gleichung $\frac{-p (v_1 + v_2)}{2}$ setzen.

Wird $\lim u_2 = u_1$ und $\lim v_2 = v_1$, so wird der Schnittpunkt der beiden betrachteten Tangenten zum Berührungspunkte von $u_1 \mid v_1$.

Die gesuchte Richtungskonstante hat also den Wert $-p v_1$.

Aufgabe 4. Man soll die Koordinaten des Berührungspunktes der Parabeltangente $u_1 \mid v_1$ angeben.

---

*) Hier, sowie bei den folgenden Betrachtungen über die Parabel soll stets ein rechtwinkeliges Koordinatensystem und die Gleichung $pv^2 = 2u$ vorausgesetzt werden.

Auflösung. Dieselben werden aus dem Systeme der Gleichungen

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$$

$$y = - p v_1 x$$

gefunden, wovon die erste Gleichung die der Tangente und die zweite die der Geraden ist, die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogen ist. Es ergiebt sich, daß

$$x = \frac{1}{p v_1^2 - u_1} \text{ und } y = - \frac{p v_1}{p v_1^2 - u_1} \text{ oder,}$$

weil $p v_1^2 = 2 u_1$ ist,

$$x = \frac{1}{u_1} \text{ und } y = - \frac{2}{v_1}.$$

Zusatz 1. Weil u_1 nur positive Werte annehmen kann, so kann auch x nur solche Werte annehmen, und die Parabel liegt daher nur rechts von der Ordinatenaxe.

Zusatz 2. $-\frac{1}{u_1}$ ist der Abschnitt der Tangente $u_1 \mid v_1$ auf der x-Axe. $+\frac{1}{u_1}$ ist die Abscisse des Berührungspunktes dieser Tangente. Darauf beruht eine sehr einfache Konstruktion des Berührungspunktes einer Parabeltangente. Wenn man in Fig. 5 CA = AB macht, so ist C der Berührungspunkt der Tangente AB.

Zusatz 3. Um die Gleichung der Parabel in Punktkoordinaten zu erhalten, eliminiert man aus den Gleichungen

$$p v_1^2 = 2 u_1 ; \; x = \frac{1}{u_1} \text{ und } y = - \frac{2}{v_1}$$

die Größen u_1 und v_1. Man findet

$$y^2 = 2 px.$$

Aufgabe 5. Man soll die Bedingung angeben, unter der die Gerade $u_1 \mid v_1$ die Parabel $pv^2 - 2u = 0$ schneidet oder gar nicht trifft.

Auflösung. Man ziehe durch den Punkt, in welchem die gegebene Gerade die y-Axe schneidet, die noch fehlende Parabeltangente. Letztere hat dieselbe Ordinate wie die gegebene Gerade. Ihre Abscisse möge mit u_2 und der Ausdruck $pv_1^2 - 2 u_1$ mit P_1 bezeichnet werden. Subtrahirt man nun die Gleichung $pv_1^2 - 2 u_2 = 0$, welche bestehen muß, weil $u_2 \mid v_1$ eine Tangente ist, von der Gleichung $P_1 = pv_1^2 - 2 u_1$, so resultiert

$$P_1 = 2 \, (u_2 - u_1).$$

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß in Fig. 5 alle Punkte der Parabel in dem Winkelfeld CAO liegen, und daß mithin eine Gerade, die sich um A dreht, die Parabel schneidet, wenn sie im Winkelfeld

CAO liegt und die Parabel nicht schneidet, wenn sie im Winkelfeld OAB liegt.

Gesetzt $u_1 \mid v_1$ läge im Winkelfeld OAB. Dann sind u_2 und u_1 beide positiv, aber u_1 ist größer als u_2. Mithin ist P_1 negativ.

Wenn $u_1 \mid v_1$ im Winkelfeld CAO liegt, so werden die beiden Verlängerungen von BO geschnitten. Schneidet $u_1 \mid v_1$ die auf der negativen Seite der x-Axe liegende Verlängerung von BO, so ist u_1 kleiner als u_2, mithin P_1 positiv.

Schneidet $u_1 \mid v_1$ den positiven Teil der x-Axe, so ist u_1 negativ. Mithin ist P_1 wiederum positiv.

Wir kommen demnach zum Ergebnis, daß der Wert der linken Seite der auf null gebrachten Parabelgleichung positiv wird, wenn man statt u und v die Koordinaten einer die Parabel schneidenden Geraden setzt, und daß dieser Ausdruck negativ wird, wenn man die Koordinaten einer Geraden einträgt, welche die Parabel nicht schneidet.

Aufgabe 6. Der Brennpunkt einer Parabel wird mit den Punkten verbunden, in welchen die Parabeltangenten die y-Axe schneiden und jede dieser Strecken um sich selbst über den Schnittpunkt zwischen Tangente und y-Axe hinaus verlängert. Man soll

1. den Ort des Endpunktes der Verlängerung bestimmen,
2. die Lage der Geraden angeben, welche von dem Endpunkte jeder Verlängerung nach dem Berührungspunkte der ihr zugehörigen Tangente gezogen ist.

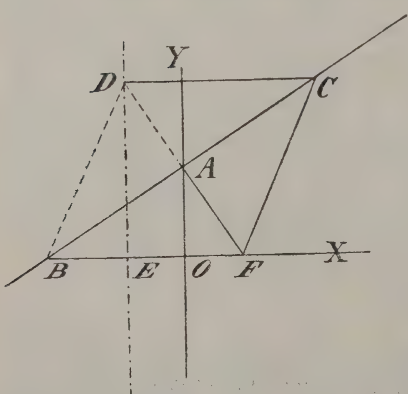


Fig. 7.

Auflösung. 1. In Fig. 7 sei F der Brennpunkt einer Parabel, OY ihre Scheiteltangente, C der Berührungspunkt der Tangente BC und DA = AF.

Der Ort von D ist nach Aehnlichkeitssätzen eine Parallele zur y-Axe im Abstande $\frac{-p}{2}$; denn jede Strecke, die von einem Punkte der erwähnten Parallelen nach dem Brennpunkte geht, wird von der y-Axe halbiert.

2. Weil AC = AB und AF = AD, so ist BDCF ein Parallelogramm. Also ist DC || BF d. h. parallel mit der x-Axe.

Zusatz 1. Die Gerade, welche im Abstande $-\frac{p}{2}$ parallel zur y-Axe gezogen ist, heißt Direktrix der Parabel.

Zusatz 2. Da jede Parallele zur x-Axe ein Durchmesser der Parabel heißt, so ist DC ein Durchmesser derselben.

Definition. Die Gerade, welche den Berührungspunkt einer Tangente der Parabel mit dem Brennpunkte verbindet, heißt Radius vector.

Aufgabe 7. Man soll beweisen, daß der Berührungspunkt einer Tangente von der Direktrix denselben Abstand hat wie vom Brennpunkte.

Beweis. In Fig. 7 ist DF $\perp$ BC; mithin ist das Parallelogramm BDCF ein Rhombus. Es ist also CD = CF. Beachtet man, daß CD als Parallele zur x-Axe zu DE $\perp$ ist, so ist die obige Behauptung erwiesen.

Anmerkung. Die Parabel ist somit der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkte und von einer festen Geraden gleichen Abstand haben.

Aufgabe 8. Man soll zeigen, daß die Parabeltangente den Winkel halbiert, den der Radius vector und der Durchmesser, die durch ihren Berührungspunkt gehen, mit einander einschließen.

Auflösung. In Fig. 7 ist die Tangente BC die Diagonale des Rhombus BDCF, halbiert mithin den Winkel zwischen den in Betracht kommenden Geraden CD und CF.

Aufgabe 9. Man soll angeben, wie viele Tangenten von irgend einem Punkte der Ebene an die Parabel $p\,v^2 - 2\,u = 0$ gezogen werden können.

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt mögen die Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ gehen. Dann sind die Koordinaten von jeder durch den gegebenen Punkt gehenden Geraden von der Form

$$\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda} \;\Big|\; \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda},$$

wo λ jede positive und negative Zahl bedeuten kann.

Diejenigen unter diesen Geraden, welche die Parabel berühren, erfüllen die Bedingung:

$$p\left(\frac{v_1 + \lambda v_2}{1+\lambda}\right)^2 - 2\,\frac{u_1 + \lambda u_2}{1+\lambda} = 0 \text{ oder}$$

$$(p v_1{}^2 - 2 u_1) + 2\lambda [p v_1 v_2 - (u_1 + u_2)] + \lambda^2 (p v_2{}^2 - 2 u_2) = 0.$$

Hieraus lassen sich im allgemeinen 2 Werte für λ bestimmen. Es lassen sich also höchstens zwei Tangenten von einem Punkte der Ebene an eine Parabel ziehen. Dieselben können, entsprechend den Werten von λ 1. verschieden, 2. sich deckend und 3. imaginär sein.

Zusatz. Weil sich von keinem Punkte der Ebene mehr als 2 Tangenten an eine Parabel legen lassen, wird sie eine Kurve zweiter Klasse genannt.

Definition. Zwei Geraden der Ebene heißen bezüglich eines Kegelschnittes konjugiert *), wenn sie mit den beiden von ihrem Schnittpunkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten in Harmonie sind.

Aufgabe 10. Man soll die Bedingung angeben, unter der die Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ bezüglich der Parabel $p v^2 - 2 u = 0$ konjugiert sind.

Auflösung. Die gesuchte Bedingung ergiebt sich aus der letzten Gleichung bei Aufg. 9. Werden in dieser Gleichung die Werte von λ entgegengesetzt gleich, so sind $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ konjugiert.

Dieses tritt aber ein, wenn

$$p v_1 v_2 - (u_1 + u_2) = 0 \text{ ist.}$$

Die beiden Werte von λ, welche die zugehörigen Tangenten bestimmen, werden, wenn diese Bedingung erfüllt ist, aus der Gleichung

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{p v_1{}^2 - 2 u_1}{p v_2{}^2 - 2 u_2}} \text{ bestimmt,}$$

woraus ersichtlich ist (Aufg. 5, S. 21), daß eine von zwei konjugierten Geraden die Parabel schneidet, während die andere ganz außerhalb derselben liegt.

Aufgabe 11. Man soll den Ort aller Geraden angeben, die zu der festen Geraden $u_1 \mid v_1$ konjugiert sind.

Auflösung. Eine Gerade der verlangten Art möge die Koordinaten $u \mid v$ besitzen. Nach der vorhergehenden Aufgabe findet dann die Bedingung statt $p v_1 v - (u_1 + u) = 0$ oder

$$\left(\frac{1}{u_1}\right) u - \frac{p v_1}{u_1} v + 1 = 0.$$

*) Vergl. Reye, Geometrie der Lage, 1. Abteilung pag. 83 der 2. Auflg.

Aus dieser Gleichung folgt, daß es unendlich viele Geraden $(u \mid v)$ giebt, die zu $u_1 \mid v_1$ konjugiert sind. Alle gehen durch den Punkt $\frac{1}{u_1} \Big| -\frac{pv_1}{u_1}$, dessen Koordinaten mit $x_1 \mid y_1$ bezeichnet werden sollen. Dieser Punkt heißt der Pol der Geraden $u_1 \mid v_1$. Ferner wird die Gerade $u_1 \mid v_1$ die Polare des Punktes $x_1 \mid y_1$ genannt. Zur Berechnung der Koordinaten des Poles der Geraden $u_1 \mid v_1$ resp. der Koordinaten der Polare des Punktes $x_1 \mid y_1$ dienen die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{1}{u_1},\ y_1 = \frac{-pv_1}{u_1} \text{ resp. } u_1 = \frac{1}{x_1},\ v_1 = \frac{-y_1}{p\,x_1}.$$

Zusatz. Wenn $u_1 \mid v_1$ eine Tangente ist, so geht der Wert von y_1 vermöge der Beziehung $pv_1{}^2 = 2\,u_1$ über in $\frac{-2}{v_1}$.

Die Koordinaten des Poles von $u_1 \mid v_1$ sind also (nach Aufg. 4) gleich denen des Berührungspunktes; mithin ist der Pol einer Tangente ihr Berührungspunkt.

Aufgabe 12. Man soll angeben:

1. die Länge des nach dem Berührungspunkte der Parabeltangente $u_1 \mid v_1$ gezogenen Radius vector,
2. die Länge der Subtangente,
3. die der Subnormale,
4. die der Tangente und
5. die der Normale.

Auflösung. Wenn die Länge des Radius vector mit r bezeichnet wird und sonst die Bezeichnungen wie beim Kreise beibehalten werden, so ist

1. $r = x_1$*) $+ \frac{p}{2} = \frac{1}{u_1} + \frac{p}{2} = \frac{p\,u_1 + 2}{2\,u_1}$

2. $s_t = \frac{2}{u_1}$

3. $s_n = \frac{y_1{}^2}{s_t} = \frac{p^2\,v_1{}^2\,u_1}{u_1{}^2\,.\,2} = p$

4. $t = \sqrt{(s_n + s_t)\,s_t} = \sqrt{\frac{(pu_1 + 2)}{u_1}\,.\,\frac{2}{u_1}} = \frac{1}{u_1}\sqrt{2\,(p\,u_1 + 2)}$

5. $n = \sqrt{(s_n + s_t)\,s_n} = \sqrt{p\,.\,\frac{pu_1 + 2}{u_1}} = \frac{1}{u_1}\sqrt{p\,u_1\,(pu_1 + 2)}.$

---

*) x_1 und y_1 sind die Koordinaten des Berührungspunktes, $u_1 \mid v_1$ ist die gegebene Tangente.

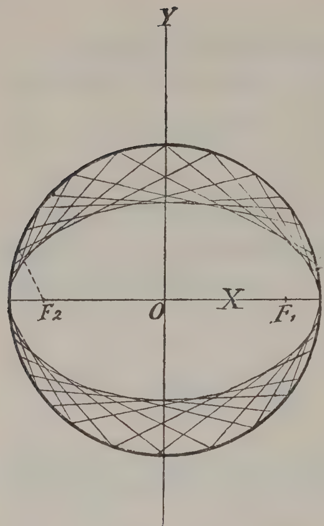


Fig. 8.

Die Ellipse.

§ 11.

Definitionen. Die Ellipse, Fig. 8, ist der geometrische Ort des einen Schenkels eines rechten Winkels, dessen anderer Schenkel durch einen Punkt innerhalb eines Kreises geht, und dessen Scheitel sich auf der Peripherie dieses Kreises bewegt.

Der feste Kreis heißt Hauptkreis, der feste Punkt Brennpunkt. Eine Linie, die vom Brennpunkte nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogen ist, heißt Radius vector.

Aufgabe 1. Man soll die Linienkoordinaten-Gleichung der Ellipse für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem ableiten.

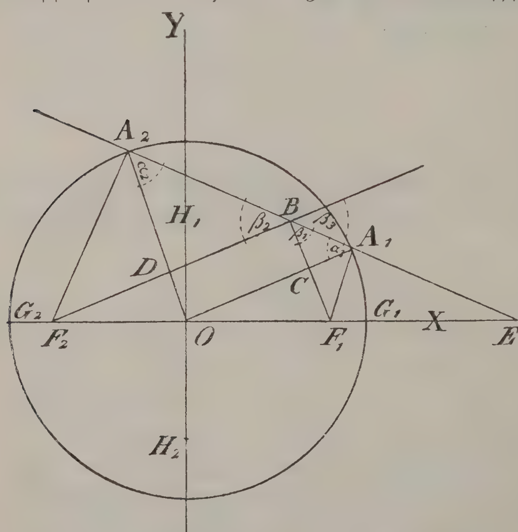


Fig. 9.

Auflösung. In Fig. 9 sei F_1 der gegebene Punkt und O der Mittelpunkt des festen Kreises. Der durch F_1 gehende Durchmesser sei x-Axe und der hierzu senkrechte Durchmesser y-Axe. Ferner sei der Radius des gegebenen Kreises gleich a und die Strecke $OF_1 = e$.

Die gesuchte Beziehung zwischen den Koordinaten der Tangenten der Ellipse ergiebt sich, indem man untersucht, wie die Koordinaten des Scheitels des sich bewegenden rechten Winkels von den Koordinaten seiner Schenkel abhängen und diese Werte in die Punktkoordinatengleichung des Hauptkreises $x^2 + y^2 = a^2$ (pag. 15) einträgt.

Wenn man die Koordinaten einer der Geraden, die den zu untersuchenden Ort bilden, mit $u \mid v$ bezeichnet, so hat diese Gerade die Gleichung $ux + vy + 1 = 0$, und die Gerade, die auf letzterer senkrecht steht und durch den Punkt $\alpha \mid \beta$ geht, hat die Gleichung

$$vx - uy - v\alpha + u\beta = 0.$$

Mithin hat der Schnittpunkt beider die Koordinaten:

$$x = \frac{\alpha v^2 - \beta uv - u}{u^2 + v^2} \;\Big|\; y = \frac{\beta u^2 - \alpha uv - v}{u^2 + v^2}.$$

Da in unserem Falle $\alpha = e$ und $\beta = o$ ist, so hat der Scheitel des die Ellipse erzeugenden rechten Winkels die Koordinaten:

$$\frac{ev^2 - u}{u^2 + v^2} \;\Big|\; \frac{-(euv + v)}{u^2 + v^2}.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$, so ergiebt sich:

$$e^2 v^4 - 2euv^2 + u^2 + e^2 u^2 v^2 + 2euv^2 + v^2 - a^2 (u^2 + v^2)^2 = 0$$

$$\text{oder } -(u^2 + v^2)\,[a^2 u^2 + (a^2 - e^2)\, v^2 - 1] = 0.$$

Da nun $u^2 + v^2$ nicht stets null sein kann, so muß

$a^2 u^2 + (a^2 - e^2)\, v^2 - 1$ gleich null sein.

Setzt man hierin $a^2 - e^2 = b^2$, so ergiebt sich als Linienkoordinatengleichung der Ellipse die folgende:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Zusatz 1. Wird der Punkt F_2, welcher so liegt, daß $OF_1 = OF_2$ (Fig. 9) ist, als fester Punkt gewählt, so ist in den Ausdrücken für die Koordinaten des Scheitels $-e$ statt $+e$ zu setzen. Führt man die Rechnung durch, so gelangt man zu derselben Gleichung wie vorher. F_2 ist demnach auch als Brennpunkt zu bezeichnen.

Zusatz 2. $G_1 G_2 = 2a$ wird große Axe, $F_1 F_2 = 2e$ die Excentricität der Ellipse genannt.

Zusatz 3. Wenn in Fig. 9 $OH_1 = OH_2$ und $OH_1 = \sqrt{a^2 - e^2}$, so ist $H_1 H_2$ die kleine Axe der Ellipse.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung der Ellipse diskutieren.

1. Da die Gleichung $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$ nur die zweiten Potenzen von u und v enthält, so ergeben sich zu jedem Werte von u zwei entgegengesetzt gleiche Werte von v und zu jedem Werte von v zwei entgegengesetzt gleiche Werte von u. Daraus folgt, daß die Ellipse symmetrisch zu beiden Axen liegt.

2. Aus $u = \frac{1}{a}\sqrt{1 - b^2 v^2}$ folgt, daß für $v = o$ der Wert von $u = \pm \frac{1}{a}$ wird, d. h. daß die im Abstande $+ a$ und $- a$ gezogenen Parallelen zur y-Axe Tangenten sind. Ferner folgt aus dieser Form der Ellipsengleichung, daß die Werte von u nur dann real werden, wenn $b^2 v^2 < 1$, d. h. wenn der absolute Wert von $v < \frac{1}{b}$ ist. Man kann also nur von solchen Punkten der y-Axe, deren Entfernung vom Nullpunkte größer als b ist, Tangenten an die Ellipse ziehen.

3. Bringt man die Ellipsengleichung auf die Form

$$v = \frac{1}{b}\sqrt{1 - a^2 u^2},$$

so ersieht man, daß die Werte $u = o$, $v = \pm \frac{1}{b}$ genügen, d. h. daß die im Abstande $+ b$ und $- b$ zu der x-Axe gezogenen Parallelen Tangenten sind. Man ersieht ferner, daß die Werte von v nur dann real werden, wenn $a^2 u^2 < 1$, d. h. wenn der absolute Wert von $u < \frac{1}{a}$ ist. Man kann also nur von solchen Punkten der x-Axe, deren Entfernung vom Nullpunkte größer als a ist, Tangenten an die Ellipse ziehen.

4. u und v können nicht gleichzeitig null werden; also wird die Ellipse nicht von der unendlich fernen Geraden berührt.

Aufgabe 3. Man soll die Richtungskonstante und Gleichung der Geraden finden, die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte der Ellipsentangente $u_1 \mid v_1$ gezogen ist.

Auflösung. Angenommen $u_2 \mid v_2$ wäre eine zweite Tangente der Ellipse. Da $u_1 \mid v_1$ die Gleichung $a^2 u_1{}^2 + b^2 v_1{}^2 - 1 = 0$ und $u_2 \mid v_2$ die Gleichung $a^2 u_2{}^2 + b^2 v_2{}^2 - 1 = 0$ befriedigt, so ist

$$a^2 (u_1{}^2 - u_2{}^2) + b^2 (v_1{}^2 - v_2{}^2) = 0 \text{ oder}$$

$$- \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = \frac{b^2 (v_1 + v_2)}{a^2 (u_1 + u_2)}.$$

Hieraus folgt, daß die Richtungskonstante der Geraden, welche den Anfangspunkt mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ verbindet, den Wert $\frac{b^2 (v_1 + v_2)}{a^2 (u_1 + u_2)}$ besitzt.

Setzt man in diesem Ausdrucke $\lim v_2 = v_1$ und $\lim u_2 = u_1$, so ergiebt sich, daß die gesuchte Richtungskonstante gleich $\frac{b^2 v_1}{a^2 u_1}$ ist, und daß die gesuchte Gleichung $y = \frac{b^2 v_1}{a^2 u_1} x$ lautet.

Aufgabe 4. Man soll die Koordinaten des Berührungspunktes der Ellipsentangente $u_1 \mid v_1$ finden.

Auflösung. Dieselben werden aus dem Systeme der Gleichungen:

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$$

$$y = \frac{b^2 v_1}{a^2 u_1} x \text{ gefunden.}$$

Berücksichtigt man, daß $a^2 u_1{}^2 + b^2 v_1{}^2 = 1$ ist, so wird

$$x = -a^2 u_1 \text{ und } y = -b^2 v_1.$$

Zusatz 1. Da die Gleichung für x auch in der Form geschrieben werden kann $x = \frac{a^2}{\left(-\frac{1}{u_1}\right)}$, so ist x die dritte Proportinale zwischen dem Abschnitte der Tangente auf der x-Axe und der halben großen Axe der Ellipse. Aehnliches gilt für die Ordinate des Berührungspunktes.

Zusatz 2. Um die Gleichung der Ellipse in Punktkoordinaten zu finden, eliminiert man aus den 3 Gleichungen $a^2 u_1{}^2 + b^2 v_1{}^2 - 1 = 0$, $x = -a^2 u_1$ und $y = -b^2 v_1$ die Größen u_1 und v_1. Man findet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aufgabe 5. Man soll die Bedingung angeben, unter der die Gerade $u_1 \mid v_1$ die Ellipse $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$ schneidet oder ganz außerhalb derselben liegt.

Auflösung. Die gesuchte Bedingung ergiebt sich, indem wir untersuchen, welchen Wert die linke Seite der auf null gebrachten Ellipsengleichung annimmt, wenn wir statt u und v die Koordinaten der gegebenen Geraden eintragen.

Der Ausdruck $a^2 u_1{}^2 + b^2 v_1{}^2 - 1$ werde mit E_1 bezeichnet, und die zu $u_1 \mid v_1$ parallele Tangente, welche dieselben Teile der Axen schneidet wie $u_1 \mid v_1$, möge die Koordinaten $u \mid v$ besitzen.

Setzen wir nun $u_1 = \lambda u$, so ist auch $v_1 = \lambda v$, und es wird $E_1 = \lambda^2 (a^2 u^2 + b^2 v^2) - 1 = \lambda^2 (a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1)$*) $+ \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 1$.

*) Weil $u \mid v$ Tangente ist, so ist $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$.

Wenn $u_1 \mid v_1$ die Ellipse schneidet, so ist der absolute Wert von u_1 größer als der absolute Wert von u. Es ist also, da u und u_1 einerlei Vorzeichen haben, $\lambda > 1$ und mithin E_1 positiv.

Liegt $u_1 \mid v_1$ ganz außerhalb der Ellipse, so ist der absolute Wert von u_1 kleiner als der absolute Wert von u. Weil u_1 und u gleiche Vorzeichen haben, so ist $\lambda < 1$, mithin E_1 negativ.

Aufgabe 6. Nach den beiden Punkten, in welchen eine Ellipsentangente den Hauptkreis schneidet, sind die Radien gezogen; man soll nachweisen, daß jeder der Radien vectoren, die nach dem Berührungspunkte dieser Tangente gezogen sind, einem dieser Radien parallel ist.

Auflösung. In Fig. 9 seien A_1 und A_2 die Schnittpunkte der Tangente, B sei ihr Berührungspunkt.

Wenn $A_1 A_2$ die Koordinaten $u \mid v$ besitzt, so hat nach § 11, Aufgabe 4 der Berührungspunkt B die Koordinaten $-a^2 u \mid -b^2 v$, und nach § 11, Aufgabe 1 hat A_1 die Koordinaten

$$\frac{ev^2 - u}{u^2 + v^2} \;\Big|\; \frac{-(euv + v)}{u^2 + v^2}$$

und A_2 die Koordinaten

$$\frac{-(ev^2 + u)}{u^2 + v^2} \;\Big|\; \frac{euv - v}{u^2 + v^2}.$$

Da ferner F_1 die Koordinaten $e \mid o$ und F_2 die Koordinaten $-e \mid o$ besitzt, so ist die Richtungskonstante

$$\text{von } OA_1 = -\frac{euv + v}{ev^2 - u},$$

$$\text{von } OA_2 = -\frac{euv - v}{ev^2 + u},$$

$$\text{von } F_1 B = \frac{b^2 v}{a^2 u + e} \text{ und}$$

$$\text{von } F_2 B = \frac{b^2 v}{a^2 u - e}.$$

Die Gleichung der Ellipse kann in der Form geschrieben werden

$$v^2 = \frac{-a^2 u^2 + 1}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Multipliziert man beiderseits mit e und subtrahiert hierauf von jeder Seite u, so ergiebt sich

$$ev^2 - u = \frac{-ea^2u^2 + e - (a^2 - e^2)u}{b^2} = \frac{-(a^2u - e)(eu + 1)}{b^2}$$

oder

$$-\frac{eu + 1}{ev^2 - u} = \frac{b^2}{a^2u - e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Multipliziert man in Gleichung (I) beiderseits mit e und addiert dann auf jeder Seite u, so ergiebt sich

$$ev^2 + u = \frac{-ea^2u^2 + e + (a^2 - e^2)u}{b^2} = \frac{-(a^2u + e)(eu - 1)}{b^2}$$

oder

$$-\frac{eu - 1}{ev^2 + u} = \frac{b^2}{a^2u + e} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Multipliziert man die Gleichungen II und III je mit v, so erfährt man aus II, daß die Richtungskonstanten von OA_1 und F_2B gleich sind, und aus III, daß die Richtungskonstanten von OA_2 und F_1B gleich sind. Mithin ist $OA_1 \parallel F_2B$ und $OA_2 \parallel F_1B$.

Zusatz 1. Man findet also den Berührungspunkt von A_1A_2, indem man zu OA_1 durch F_2 die Parallele zieht.

Zusatz 2. In Fig. 9 ist das Viereck ODBC ein Parallelogramm.

Zusatz 3. Da im $\triangle\ BF_1F_2$ der Punkt O die Mitte von F_1F_2 ist und $OC \parallel F_2B$ läuft, so ist C die Mitte von BF_1. Ebenso zeigt man, daß D die Mitte von BF_2 ist.

Zusatz 4. Weil $\triangle\ BA_1F_1$ rechtwinkelig ist und C die Mitte der Hypotenuse BF_1, so ist $CF_1 = CB = CA_1$. Ebenso zeigt man, daß $DF_2 = DB = DA_2$ ist. Nun ist

$$BF_1 = BC + CF_1 = OD + CA_1 \text{ und}$$
$$BF_2 = BD + DF_2 = DA_2 + OC, \text{ mithin}$$

$$BF_1 + BF_2 = (OD + DA_2) + (OC + CA_1) = 2a.$$

Die Ellipse ist also der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist.

Zusatz 5. Da $OA_1 = OA_2$, so ist $\sphericalangle\ \alpha_1 = \sphericalangle\ \alpha_2$. Da ferner $CA_1 = CB$, so ist $\sphericalangle\ \alpha_1 = \sphericalangle\ \beta_1$, und weil endlich $DA_2 = DB$, so ist $\sphericalangle\ \alpha_2 = \beta_2$. Mithin ist $\sphericalangle\ \beta_1 = \sphericalangle\ \beta_2 = \sphericalangle\ \beta_3$.

Die Tangente eines Ellipsenpunktes halbiert also den Winkel zwischen dem nach ihm gezogenen Radius vector und der Verlängerung des anderen eben dahin führenden Radius vector.

Ferner folgt aus Zusatz 3 der Satz: Die Normale eines Ellipsenpunktes halbiert den Winkel zwischen den beiden nach ihm führenden Radien vectoren.

Aufgabe 7. Man soll angeben, wie viele Tangenten von irgend einem Punkte der Ebene an eine Ellipse gezogen werden können.

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt mögen die Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ gehen. Die Koordinaten der durch diesen Punkt gehenden Ellipsentangenten sind dann von der Form

$$\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda} \,\Big|\, \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}, \text{ wo } \lambda$$

eine Zahl ist, die sich ergiebt, indem man diese Ausdrücke an die Stelle der entsprechenden Koordinaten in die Gleichung der Ellipse einträgt.

Zur Bestimmung von λ hat man also die Gleichung:

$$a^2 (u_1 + \lambda u_2)^2 + b^2 (v_1 + \lambda v_2)^2 - (1 + \lambda)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$a^2 u_1^2 + b^2 v_1^2 - 1 + 2\lambda (a^2 u_1 u_2 + b^2 v_1 v_2 - 1) + \lambda^2 (a^2 u_2^2 + b^2 v_2^2 - 1) = 0.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, daß sich im allgemeinen 2 Werte für λ ergeben, daß mithin auch im allgemeinen 2 Tangenten von Punkten der Ebene an eine Ellipse gezogen werden können.

Anmerkung. Vermöge dieser Eigenschaft ist die Ellipse eine Kurve zweiter Klasse.

Zusatz 1. $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ sind einander konjugiert, wenn die Werte für λ entgegengesetzt gleich werden. Dieses findet statt, wenn

$$a^2 u_1 u_2 + b^2 v_1 v_2 - 1 = 0 \text{ ist.}$$

Zusatz 2. Sind $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ konjugiert bezüglich der Ellipse $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$, so sind die Koordinaten der vom Schnittpunkte beider Geraden ausgehenden Tangenten durch die Gleichung

$$\lambda = \pm \sqrt{- \frac{a^2 u_1^2 + b^2 v_1^2 - 1}{a^2 u_2^2 + b^2 v_2^2 - 1}} \text{ bestimmt.}$$

Daraus ersieht man unter Beachtung von Aufgabe 5 des § 11, daß λ nur dann real wird, wenn die eine Gerade die Ellipse schneidet, während die andere ganz außerhalb derselben liegt.

Aufgabe 8. Man soll den Ort aller Geraden angeben, die zu $u_1 \mid v_1$ konjugiert sind.

Auflösung. Eine der Geraden, die zur gegebenen konjugiert sind, möge die Koordinaten $u \mid v$ besitzen. Nach der vorhergehenden Aufgabe existiert dann die Beziehung:

$$a^2 u_1 u + b^2 v_1 v - 1 = 0 \text{ oder}$$

$$(- a^2 u_1)\, u + (- b^2 v_1)\, v + 1 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erfährt man, daß es unendlich viele Geraden giebt, die zu $u_1 \mid v_1$ konjugiert sind. Dieselben gehen sämtlich durch den Punkt $-a^2 u_1 \mid -b^2 v_1$, welcher der Pol von $u_1 \mid v_1$ genannt wird.

Setzt man $-a^2 u_1 = x_1$ und $-b^2 v_1 = y_1$, so wird

$$u_1 = -\frac{x_1}{a^2} \text{ und } v_1 = -\frac{y_1}{b^2}.$$

Die beiden letzten Gleichungen lehren, daß jedem Punkte der Ebene bezüglich der Ellipse eine bestimmte Gerade zugeordnet ist, welche Polare dieses Punktes heißt.

Aufgabe 9. Die Länge der nach dem Berührungspunkte der Tangente $u_1 \mid v_1$ gehenden Radien vectoren, die Länge der Tangente und der zugehörigen Normale, Subtangente und Subnormale zu bestimmen.

Auflösung. Der von F_1 ausgehende Radius vector soll mit r_1 und der von F_2 ausgehende mit r_2 bezeichnet werden. Im übrigen soll die frühere Bezeichnung beibehalten werden.

1. In Fig. 9 ist $OA_2 : F_1B = EO : EF_1$ oder

$$a : r_1 = -\frac{1}{u_1} : -\left(\frac{1}{u_1} + e\right) = 1 : (1 + e u_1).$$

Mithin ist $$r_1 = a(1 + e u_1).$$

Weil nach Aufg. 6 Zus. 4 dieses §

$$r_1 + r_2 = 2a, \text{ so ist } r_2 = a(1 - e u_1).$$

2. $$s_t = -\frac{1}{u_1} - (-a^2 u_1) = -\frac{1 - a^2 u_1^2}{u_1} = -\frac{b^2 v_1^2}{u_1}.$$

3. $$s_n = \frac{y_1^2 {}^{*)}}{s_t} = -\frac{b^4 v_1^2}{b^2 v_1^2} u_1 = -b^2 u_1.$$

4. $$t = \sqrt{(s_n + s_t)\, s_t} = \frac{b^2 v_1}{u_1} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}.$$

5. $$n = \sqrt{(s_n + s_t)\, s_n} = b^2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}.$$

*) x_1 und y_1 sind die Koordinaten des Berührungspunktes von $u_1 \mid v_1$.

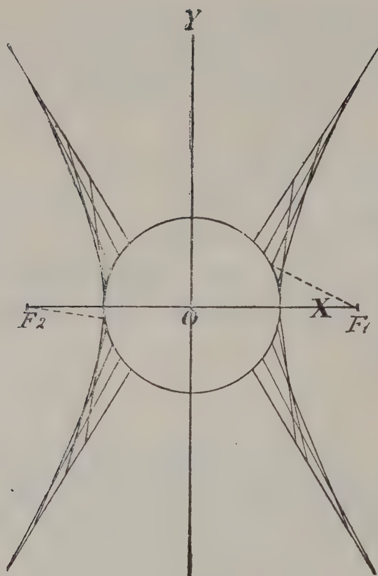


Fig. 10.

Die Hyperbel.

§ 12.

Definitionen. Die Hyperbel (Fig. 10) ist der geometrische Ort des einen Schenkels eines rechten Winkels, dessen anderer Schenkel durch einen Punkt außerhalb eines Kreises geht, und dessen Scheitel sich auf der Peripherie dieses Kreises bewegt.

Der feste Kreis heißt Hauptkreis und der feste Punkt Brennpunkt. Eine Linie, die vom Brennpunkte nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogen ist, heißt Radius vector.

Aufgabe 1. Man soll die Linienkoordinaten-Gleichung der Hyperbel für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem ableiten.

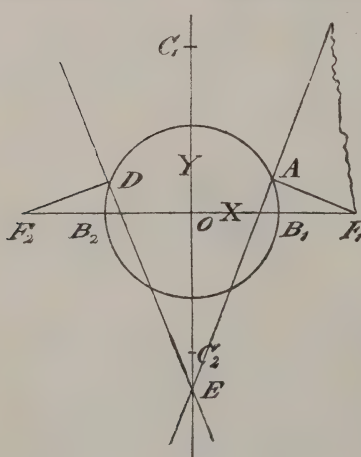


Fig. 11.

Auflösung. In Fig. 11 sei F_1 der gegebene Punkt und O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Der durch F_1 gehende Durchmesser sei x-Axe und der hierzu senkrechte Durchmesser y-Axe. Ferner sei, wie bei der Ellipse, der Radius des gegebenen Kreises gleich a und $OF_1 = e$.

Wenn die Koordinaten einer der Geraden, die den zu untersuchenden Ort bilden, mit u | v bezeichnet werden, so sind

$$\frac{e v^2 - u}{u^2 + v^2} \;\Big|\; \frac{-(e u v + v)}{u^2 + v^2}$$

wieder die Koordinaten des Scheitels des sich bewegenden rechten Winkels.

Wie in Aufgabe 1 des § 11 findet man, daß die gesuchte Gleichung die folgende ist:

$$(u^2 + v^2)\,[a^2 u^2 + (a^2 - e^2)\,v^2 - 1] = 0.$$

Da nun der erste Faktor nicht stets null sein kann, so muß

$$a^2 u^2 + (a^2 - e^2)\,v^2 - 1 = 0 \text{ sein.}$$

Setzt man $e^2 - a^2 = b^2$, so ergiebt sich die Gleichung

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Zusatz 1. Wird der Punkt F_2, welcher so liegt, daß $OF_1 = OF_2$ ist, als fester Punkt gewählt, so ergiebt sich dieselbe Gleichung. F_2 ist demnach auch als Brennpunkt zu bezeichnen.

Zusatz 2. $B_1 B_2 = 2a$ heißt Hauptaxe (Zwergaxe) und $F_1 F_2 = 2e$ die Excentricität der Hyperbel.

Zusatz 3. Wenn $OC_1 = OC_2$ und $OC_1 = \sqrt{e^2 - a^2}$, so ist $C_1 C_2$ die Nebenaxe.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung der Hyperbel diskutieren.

Auflösung. 1. Da die Gleichung $a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$ nur die zweiten Potenzen von u und v enthält, so ergeben sich zu jedem Werte von u zwei entgegengesetzt gleiche Werte von v, und zu jedem Werte von v zwei entgegengesetzt gleiche Werte von u. Mithin liegt die Hyperbel symmetrisch zu beiden Axen.

2. Bringt man die Hyperbelgleichung auf die Form $u = \frac{1}{a}\sqrt{1 + b^2 v^2}$, so ersieht man, daß für $v = o$ der Wert von $u = \pm \frac{1}{a}$ wird. Die im Abstande $+ a$ und $- a$ zur y-Axe gezogenen Parallelen sind also Tangenten der Hyperbel. Ferner ersieht man aus dieser Form der Gleichung, daß u für jeden positiven und negativen Wert von v zwei reale Werte annimmt, d. h. daß man von jedem Punkte der y-Axe zwei Tangenten an die Hyperbel ziehen kann.

3. Bringt man die Hyperbelgleichung auf die Form:

$$v = \frac{1}{b}\sqrt{a^2 u^2 - 1},$$

so ersieht man, daß die Werte von v nur dann real werden können, wenn $a^2 u^2 > 1$, d. i. der absolute Wert von $u > \frac{1}{a}$ ist. Man kann also nur von solchen Punkten der x-Axe, deren Entfernung vom Nullpunkte kleiner als a ist, Tangenten an die Hyperbel ziehen.

4. u und v können nicht gleichzeitig null werden; also wird die Hyperbel nicht von der unendlich fernen Geraden berührt.

Aufgabe 3. Man soll die Richtungskonstante und Gleichung der Geraden finden, die vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte der Hyperbeltangente $u_1 \mid v_1$ gezogen ist.

Auflösung. Es wird zuerst die Richtungskonstante der Geraden gesucht, die vom Anfangspunkte nach dem Schnittpunkte der Tangenten $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ geht. Diese ist nach Zusatz 1 des § 6 gleich $-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}$.

Da aber $u_1 \mid v_1$ die Bedingung $a^2 u_1^2 - b^2 v_1^2 - 1 = 0$ und $u_2 \mid v_2$ die Bedingung $a^2 u_2^2 - b^2 v_2^2 - 1 = 0$ erfüllt, so ist $a^2 (u_1^2 - u_2^2) - b^2 (v_1^2 - v_2^2) = 0$ und mithin

$$-\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = -\frac{b^2 (v_1 + v_2)}{a^2 (u_1 + u_2)}.$$

Ist $u_2 \mid v_2$ die Nachbartangente von $u_1 \mid v_1$, so darf man setzen $\lim u_2 = u_1$ und $\lim v_2 = v_1$, und die gesuchte Richtungskonstante wird $= \frac{-b^2 v_1}{a^2 u_1}$. Die Gleichung der zu betrachtenden Geraden heißt demnach $y = -\frac{b^2 v_1}{a^2 u_1} x$.

Aufgabe 4. Man soll die Koordinaten des Berührungspunktes der Hyperbeltangente $u_1 \mid v_1$ finden.

Auflösung. Dieselben werden aus dem Systeme der Gleichungen:

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$$

$$y = -\frac{b^2 v_1}{a^2 u_1} x \text{ gefunden.}$$

Beachtet man, daß $a^2 u_1^2 - b^2 v_1^2 - 1 = 0$ ist, so wird $x = -a^2 u_1$ und $y = +b^2 v_1$.

Zusatz 1. Schreibt man die Gleichung für x in der Form $x = \frac{a^2}{\left(-\frac{1}{u_1}\right)}$ und beachtet, daß $-\frac{1}{u_1}$ der Abschnitt ist, den die Tangente auf der x-Axe bildet, so ersieht man, daß x die dritte Proportionale ist zwischen dem erwähnten Abschnitte und der Hauptaxe.

Zusatz 2. Um die Gleichung der Hyperbel in Punktkoordinaten zu erhalten, eliminiert man aus den drei Gleichungen $a^2 u_1^2 - b^2 v_1^2 - 1 = 0$, $x = - a^2 u_1$ und $y = b^2 v_1$ die Größen u_1 und v_1. Man findet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aufgabe 5. Man soll die Bedingung angeben, unter der die Gerade $u_1 \mid v_1$ die Hyperbel $a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$ schneidet oder ganz außerhalb derselben liegt.

Auflösung. Man ziehe durch den Punkt, in welchem $u_1 \mid v_1$ die y-Axe schneidet, die beiden Hyperbeltangenten. Dieselben haben die nämliche Ordinate wie die gegebene Gerade, nämlich v_1, und wenn die eine die Abscisse $+ u_2$ besitzt, so hat die andere die Abscisse $- u_2$; denn diese Abscissen werden nach Aufgabe 2 dieses § aus der Gleichung $u = \pm \frac{1}{a} \sqrt{1 + b^2 v_1^2}$ gefunden.

Subtrahiert man nun die Gleichung $a^2 u_2^2 - b^2 v_1^2 - 1 = 0$ (welche von $u_2 \mid v_1$ und $- u_2 \mid v_1$ befriedigt wird) von der Gleichung $H_1 = a^2 u_1^2 - b^2 v_1^2 - 1$, so ergiebt sich die Gleichung $H_1 = a^2 (u_1^2 - u_2^2)$, welche zur Ermittelung der gesuchten Bedingungen dient.

Ein Blick auf Fig. 11, in welcher E der Schnittpunkt zwischen $u_1 \mid v_1$ und der y-Axe ist, AE und DE die Hilfstangenten sind, lehrt, daß die erwähnten Hilfstangenten die Ebene in 4 Winkelfelder teilen, in ein oberes und unteres, ein rechtes und linkes. In den beiden letzteren liegt, wie Fig. 10 zeigt, die ganze Hyperbel, und eine Gerade, die durch dieselben geht, schneidet stets die Hyperbel. Eine Gerade aber, die durch das obere und untere Winkelfeld geht, hat keinen Punkt mit der Hyperbel gemeinsam.

Für eine die Hyperbel schneidende Gerade ist der absolute Wert von u_1 kleiner als der von u_2; mithin ist H_1 in diesem Falle negativ.

Für eine die Hyperbel nicht schneidende Gerade ist der absolute Wert von u_1 größer als der von u_2; mithin ist in diesem Falle H_1 positiv.

Aufgabe 6. Nach den beiden Punkten, in welchen eine Hyperbeltangente den Kreis schneidet, auf dem sich der Scheitel des die Hyperbel erzeugenden rechten Winkels bewegt, sind die Radien gezogen; man soll nachweisen, daß jeder der Radien vectoren, die nach dem Berührungspunkte dieser Tangente gezogen sind, einem dieser Radien parallel ist.

Auflösung. In Fig. 12 seien A_1 und A_2 die Schnittpunkte der Tangente, B sei ihr Berührungspunkt.

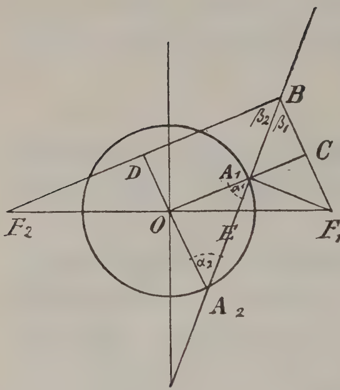


Fig. 12.

Wenn A_1 A_2 die Koordinaten $u \mid v$ besitzt, so hat nach § 12, Aufgabe 4 der Berührungspunkt B die Koordinaten $-a^2 u \mid b^2 v$ und wie im Falle der Ellipse hat A_1 die Koordinaten

$$\frac{e v^2 - u}{u^2 + v^2} \quad \Big| \quad \frac{-(e u v + v)}{u^2 + v^2}$$

und A_2 die Koordinaten

$$\frac{-(e v^2 + u)}{u^2 + v^2} \quad \Big| \quad \frac{e u v - v}{u^2 + v^2}$$

Man findet nun, daß die Richtungskonstante

$$\text{von } OA_1 = -\frac{e u v + v}{e v^2 - u},$$

$$\text{von } OA_2 = -\frac{e u v - v}{e v^2 + u},$$

$$\text{von } F_1 B = \frac{-b^2 v}{a^2 u + e} \text{ und}$$

$$\text{von } F_2 B = \frac{-b^2 v}{a^2 u - e}.$$

Die Gleichung der Hyperbel kann in der Form geschrieben werden

$$v^2 = \frac{a^2 u^2 - 1}{b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

Multipliziert man jederseits mit e und subtrahiert hierauf von jeder Seite u, so ergiebt sich

$$e v^2 - u = \frac{a^2 e u^2 - e - (e^2 - a^2) u}{b^2} = \frac{(a^2 u - e)(e u + 1)}{b^2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{b^2}{a^2 u - e} = \frac{e u + 1}{e v^2 - u} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

Multipliziert man ferner in Gleichung I beiderseits mit e und addiert dann auf jeder Seite u, so ergiebt sich

$$e v^2 + u = \frac{a^2 e u^2 - e + (e^2 - a^2) u}{b^2} = \frac{(a^2 u + e)(e u - 1)}{b^2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{b^2}{a^2 u + e} = \frac{e u - 1}{e v^2 + u} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

Multipliziert man die Gleichungen II und III je mit — v, so erfährt man aus II, daß die Richtungskonstanten von OA_1 und F_2B gleich sind, und aus III, daß die Richtungskonstanten von OA_2 und F_1B gleich sind. Mithin ist $OA_1 \parallel F_2B$ und $OA_2 \parallel F_1B$.

Zusatz 1. Man findet also den Berührungspunkt von A_1A_2, indem man zu OA_1 durch F_2 die Parallele zieht.

Zusatz 2. In Fig. 12 ist das Viereck ODBC ein Parallelogramm.

Zusatz 3. Da im $\triangle BF_1F_2$ (Fig. 12) der Punkt O die Mitte von F_1F_2 ist und $OC \parallel F_2B$, so ist C die Mitte von BF_1. Es läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß D die Mitte von BF_2 ist.

Zusatz 4. Weil $\triangle BF_1A_1$ rechtwinkelig ist und C die Mitte der Hypotenuse BF_1, so ist $CA_1 = CB = CF_1$. Ebenso zeigt man, daß $DF_2 = DB = DA_2$ ist. Nun ist

$$BF_2 = 2DB = 2OA_1 + 2A_1C \text{ und}$$
$$BF_1 = 2BC = \qquad 2A_1C.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$BF_2 - BF_1 = 2OA_1 = 2a.$$

Die Hyperbel ist also der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist.

Zusatz 5. Da $OA_1 = OA_2$, so ist (Fig. 12) $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_2$. Da ferner $CA_1 = CB$, so ist $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \beta_1$, und weil endlich $DA_2 = DB$, so ist $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \beta_2$. Mithin ist $\sphericalangle \beta_1 = \sphericalangle \beta_2$.

Die Tangente eines Hyperbelpunktes halbiert also den Winkel zwischen den beiden nach ihm gezogenen Radien vectoren.

Aufgabe 7. Man soll angeben, wie viele Tangenten von irgend einem Punkte der Ebene an eine Hyperbel gezogen werden können.

Auflösung. Wenn wieder $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ zwei Geraden sind, die durch den gegebenen Punkt gehen, so sind die Koordinaten der Tangente von der Form $\frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda} \Big| \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}$, wo λ eine Zahl ist, die sich aus der Gleichung

$$a^2 (u_1 + \lambda u_2)^2 - b^2 (v_1 + \lambda v_2)^2 - (1 + \lambda)^2 = 0$$

oder $(a^2 u_1^2 - b^2 v_1^2 - 1) + 2\lambda (a^2 u_1 u_2 - b^2 v_1 v_2 - 1) + \lambda^2$

$$(a^2 u_2^2 - b^2 v_2^2 - 1) = 0$$

ergiebt.

Da sich im allgemeinen 2 Werte für λ ergeben, so kann man im allgemeinen auch 2 Tangenten von Punkten der Ebene an eine Hyperbel ziehen.

Anmerkung. Vermöge dieser Eigenschaft wird die Hyperbel eine Kurve zweiter Klasse genannt.

Zusatz 1. $u_1 | v_1$ und $u_2 | v_2$ sind einander konjugiert, wenn die Werte für λ entgegengesetzt gleich werden.

Dieses findet statt, wenn $a^2 u_1 u_2 - b^2 v_1 v_2 - 1 = 0$ ist.

Zusatz 2. Sind $u_1 | v_1$ und $u_2 | v_2$ konjugiert bezüglich der Hyperbel $a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$, so sind die Koordinaten der vom Schnittpunkte beider Geraden ausgehenden Tangenten durch die Gleichung

$$\lambda = \pm \sqrt{- \frac{a^2 u_1^2 - b^2 v_1^2 - 1}{a^2 u_2^2 - b^2 v_2^2 - 1}} \text{ bestimmt.}$$

Daraus ersieht man unter Beachtung von Aufgabe 5 des § 12, daß λ nur dann real wird, wenn die eine Gerade die Hyperbel schneidet, während die andere ganz außerhalb derselben liegt.

Aufgabe 8. Man soll den Ort aller Geraden angeben, die zu $u_1 | v_1$ konjugiert sind.

Auflösung. Eine der Geraden, die zur gegebenen konjugiert sind, möge die Koordinaten $u | v$ besitzen.

Nach der vorhergehenden Aufgabe existirt die Beziehung:

$$a^2 u_1 u - b^2 v_1 v - 1 = 0 \text{ oder}$$
$$(- a^2 u_1) u + (b^2 v_1) v + 1 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erfährt man, daß es unendlich viele Geraden $u | v$ giebt, die zu $u_1 | v_1$ konjugiert sind.

Dieselben gehen sämtlich durch den Punkt $- a^2 u_1 | b^2 v_1$, welcher der Pol von $u_1 | v_1$ genannt wird.

Setzt man $- a^2 u_1 = x_1$ und $b^2 v_1 = y_1$, so wird $u_1 = - \frac{x_1}{a^2}$ und $v_1 = \frac{y_1}{b^2}$.

Die durch die letzten Gleichungen bestimmte Gerade wird die Polare des Punktes $x_1 | y_1$ genannt.

Aufgabe 9. Die Länge der nach dem Berührungspunkte von $u_1 | v_1$ gehenden Radien vectoren, die Länge der Tangente und der dazugehörigen Normale, Subtangente und Subnormale zu finden.

Auflösung. In Fig. 12 sei $F_1 B = r_1$ und $F_2 B = r_2$. Im übrigen soll die frühere Bezeichnung beibehalten werden.

Nun ist 1. $OA_2 : BF_1 = OE : EF_1$ oder

$$a : r_1 = - \frac{1}{u_1} : \left[e - \left(- \frac{1}{u_1}\right)\right]$$
$$= - 1 : (e u_1 + 1).$$

Mithin ist $r_1 = - a(e u_1 + 1)$. Weil $r_2 - r_1 = 2a$, so ist $r_2 = - a(e u_1 - 1)$.

2. $s_t = - a^2 u_1 - \left(\frac{-1}{u_1}\right) = \frac{1 - a^2 u_1^2}{u_1} = - \frac{b^2 v_1^2}{u_1}$.

3. $s_n = \frac{y_1^2 *)}{s_t} = - \frac{b^4 v_1^2}{b^2 v_1^2} u_1 = - b^2 u_1$.

4. $t = \sqrt{(s_n + s_t) s_t} = \frac{b^2 v_1}{u_1} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$.

5. $n = \sqrt{(s_n + s_t) s_n} = b^2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$.

Durchmesser der Kegelschnitte.

§ 13.

Definition. Bei der Ellipse und Hyperbel heißt jede Gerade, welche durch das Centrum des Kreises geht, auf dem sich bei der Konstruktion der Scheitel des rechten Winkels bewegt, ein Durchmesser.

Aufgabe. Man soll nachweisen, daß die Pole einer Schar paralleler Sehnen eines jeden Kegelschnittes auf einem Durchmesser liegen.

Auflösung. $\lambda u \mid \lambda v$ stellt bei veränderlichem λ eine Schar von Geraden vor, die sämtlich zu $u \mid v$ parallel sind.

I. Der Pol $(x \mid y)$ einer jeden Geraden der Schar wird bezüglich der Parabel $p v^2 = 2u$ nach Aufg. 11 des § 10 aus den Gleichungen:

$$x = \frac{1}{\lambda u}, \; y = - p \frac{\lambda v}{\lambda u} = - p \frac{v}{u}$$

berechnet. Die letzte dieser Gleichungen lehrt, daß die Ordinaten der Pole aller Geraden der Schar gleich sind, daß diese Pole also auf einem Durchmesser der Parabel liegen.

II. Der Pol $(x \mid y)$ einer jeden Geraden der Schar wird bezüglich der Ellipse $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$ nach Aufg. 8 des § 11 aus den Gleichungen:

$$x = - a^2 \lambda u, \; y = - b^2 \lambda v$$

berechnet.

---

*) $x_1 \mid y_1$ ist der Berührungspunkt von $u_1 \mid v_1$.

Durch Division dieser beiden Gleichungen findet man:

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2 v}{a^2 u},$$

woraus ersichtlich ist, daß sämtliche Pole auf einem Durchmesser der Ellipse liegen.

III. Der Pol $(x \mid y)$ einer jeden Geraden der Schar wird bezüglich der Hyperbel $a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$ nach Aufg. 8 des § 12 aus den Gleichungen $x = - a^2 \lambda u$, $y = b^2 \lambda v$ berechnet.

Dividiert man die erste Gleichung in die zweite, so ergiebt sich

$$\frac{y}{x} = - \frac{b^2 v}{a^2 u},$$

woraus folgt, daß sämtliche Pole auf einem Durchmesser liegen.

Zusatz. Zwei Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel, von denen der eine zu einer Schar paralleler Sehnen gehört und der andere die Pole dieser Sehnen enthält, heißen konjugierte Durchmesser dieser Kegelschnitte.

Der zur Schar $\lambda u \mid \lambda v$ gehörige Durchmesser hat die Richtungskonstante $- \frac{u}{v}$. Der konjugierte Durchmesser hat bei der Ellipse die Richtungskonstante $\frac{b^2 v}{a^2 u}$ und bei der Hyperbel die Richtungskonstante $\frac{- b^2 v}{a^2 u}$.

Setzt man $- \frac{u}{v} = \operatorname{tg} \alpha$ und bezeichnet die Richtungskonstante des zu $u x + v y = 0$ konjugierten Durchmessers mit $\operatorname{tg} \beta$, so findet im Falle der Ellipse die Bezeichnung statt:

$$\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \beta = - \frac{b^2}{a^2} \text{ und}$$

im Falle der Hyperbel:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = + \frac{b^2}{a^2}.$$

Andere Formen für die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel.

§ 14.

Aufgabe 1. Man soll die Gleichung der Ellipse in bezug auf zwei konjugierte Durchmesser angeben.

Auflösung. In bezug auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem habe die Ellipse die Gleichung $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$.

Der eine der konjugierten Durchmesser bilde mit der x-Axe dieses Systems den Winkel α, der andere den Winkel β, und der Winkel zwischen den beiden konjugierten Durchmessern sei φ.

Wenn nun die Tangente u | v im Systeme, dessen Axen die konjugierten Durchmesser sind, die Koordinaten U | V besitzt, so ist nach dem Zusatze der Aufgabe 2 des § 8 zu setzen:

$$u = \frac{U \sin\beta - V \sin\alpha}{\sin\varphi}, \; v = \frac{-U \cos\beta + V \cos\alpha}{\sin\varphi}.$$

Trägt man diese Werte für u und v in die Gleichung der Ellipse ein, so ergiebt sich:

$$\frac{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}{\sin^2\varphi} U^2 + \frac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{\sin^2\varphi} V^2$$
$$- 2 \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta}{\sin^2\varphi} UV - 1 = 0.$$

Nach dem vorhergehenden § ist aber

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2} \text{ oder}$$

$$a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta = 0.$$

Mithin ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}{\sin^2\varphi} U^2 + \frac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{\sin^2\varphi} V^2 - 1 = 0.$$

Anmerkung. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie in dem Falle, in welchem die Ellipse auf ihre große und kleine Axe bezogen ist. Sehr wesentlich ist, daß die Koeffizienten von U^2 und V^2 einerlei Vorzeichen haben.

Zusatz. Wenn die Gleichung einer Kurve in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem die Form hat

$$\varrho^2 u^2 + \sigma^2 v^2 - 1 = 0,$$

so bedeutet sie eine Ellipse.

Beweis. Durch ganz dieselben Betrachtungen wie in Aufgabe 7 und 8 des § 11 findet man, daß die Gerade u | v den Pol $-\varrho^2 u \mid -\sigma^2 v$ in bezug auf die durch obige Gleichung bestimmte Kurve besitzt. Da aber der Pol von jeder Tangente einer Kurve zweiter Klasse ihr Berührungspunkt ist, so hat der Berührungspunkt x | y der Tangente u | v die Koordinaten $x = -\varrho^2 u, y = -\sigma^2 v$.

Eliminiert man diesen zwei Gleichungen und aus der gegebenen die Größen u und v, so resultiert:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\sigma^2} - 1 = 0.$$

Von dieser Gleichung ist aber bekannt, daß sie eine Ellipse bedeutet.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung der Hyperbel in bezug auf zwei konjugierte Durchmesser angeben.

Auflösung. Unter denselben Voraussetzungen wie bei der letzten Aufgabe sind für u und v auch dieselben Werte zu setzen. Durch die bezeichneten Substitutionen geht die Hyperbelgleichung über in:

$$\frac{a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \varphi} U^2 - \frac{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} V^2$$
$$- 2 \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta - b^2 \cos \alpha \cos \beta}{\sin^2 \varphi} UV - 1 = 0.$$

Weil die neuen Axen konjugierte Durchmesser sind, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \text{ oder}$$
$$a^2 \sin \alpha \sin \beta - b^2 \cos \alpha \cos \beta = 0.$$

Die Hyperbelgleichung nimmt also die Form an:

$$\frac{a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \varphi} U^2 - \frac{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} V^2 - 1 = 0.$$

Anmerkung. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie in dem Falle, in welchem die Hyperbel auf ihre Haupt- und Nebenaxe bezogen ist. Sehr wesentlich ist, daß die Vorzeichen der Koeffizienten von U^2 und V^2 stets verschieden sind.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, setzen wir $b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha = \varepsilon$. Aus dieser Gleichung folgt durch Division mit $a^2 \cos^2 \alpha$:

$$\frac{b^2}{a^2} - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\varepsilon}{a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Da nach § 13 die Beziehung stattfindet $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b^4}{a^4} \cot^2 \beta$, so geht die vorhergehende Gleichung über in:

$$\frac{b^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \cot^2 \beta\right) = \frac{\varepsilon}{a^2 \cos^2 \alpha} \text{ oder}$$
$$a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta = \varepsilon \frac{a^2 \sin^2 \beta}{b^2 \cos^2 \alpha}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat dasselbe Vorzeichen wie ε, weil $\frac{a^2 \sin^2 \beta}{b^2 \cos^2 \alpha}$ stets eine positive Zahl ist.

Mithin haben $a^2 \sin^2 \beta - b^2 \cos^2 \beta$ und $b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha$ einerlei Vorzeichen, also die Koeffizienten von U^2 und V^2 verschiedene.

Zusatz. Genau wie bei der vorhergehenden Aufgabe läßt sich nachweisen, daß die Gleichungen

$$\varrho^2\, u^2 - \sigma^2\, v^2 - 1 = 0 \text{ und}$$
$$-\varrho^2\, u^2 + \sigma^2\, v^2 - 1 = 0$$

Hyperbeln bedeuten.

Diskussion

der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, in welcher die veränderlichen Größen als Linienkoordinaten aufgefaßt werden.

§ 15.

Lehrsatz. Faßt man bei jeder Lösung der Gleichung

$$a_{11}\, u^2 + 2\, a_{12}\, u\, v + a_{22}\, v^2 + 2\, a_{13}\, u + 2\, a_{23}\, v + a_{33} = 0$$

den Wert für u als Abscisse und den Wert für v als Ordinate einer Geraden in einem beliebigen zweiaxigen Koordinatensysteme auf, so ist diese Gleichung der analytische Ausdruck für alle Kurven zweiter Klasse, d. h. derjenigen Kurven, an die man von einem Punkte der Ebene höchstens zwei Tangenten ziehen kann.

Beweis. Denkt man sich durch den Punkt, von dem man wissen will, wie viele Tangenten von ihm an die durch obige Gleichung definirte Kurve gehen, die Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ gelegt, so sind die Koordinaten der Tangenten von der Form

$$\frac{u_1 + \lambda\, u_2}{1 + \lambda} \;\Big|\; \frac{v_1 + \lambda\, v_2}{1 + \lambda},$$

wo λ eine Zahl ist, die sich ergiebt, wenn man diese Ausdrücke in die gegebene Gleichung einträgt.

Da sich eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von λ ergiebt, so gehen im allgemeinen 2 Tangenten von einem Punkte der Ebene an die gegebene Kurve, d. h. sie ist eine solche zweiter Klasse.*)

Aufgabe 1. Man soll die Bedingung angeben, unter der die Geraden $u_1 \mid v_1$ und $u_2 \mid v_2$ konjugiert sind in bezug auf die Kurve, die durch die Gleichung

$$a_{11}\, u^2 + 2\, a_{12}\, u\, v + a_{22}\, v^2 + 2\, a_{13}\, u + 2\, a_{23}\, v + a_{33} = 0$$

definiert ist.

*) Man könnte den Beweis auch dadurch liefern, daß man die gemeinschaftlichen Lösungen zwischen der gegebenen Gleichung und der Gleichung

$$x_1\, u + y_1\, v + 1 = 0$$

sucht. Man würde dann die Anzahl der Tangenten finden, die durch $x_1 \mid y_1$ gezogen werden können.

Auflösung. Der Wert, den die linke Seite der gegebenen Gleichung annimmt, indem man u_1 und v_1 resp. u_2 und v_2 einträgt, werde mit C_1 resp. C_2 bezeichnet.

Setzt man ferner

$$a_{11}\, u_1 + a_{12}\, v_1 + a_{13} = C_{11}\,,$$
$$a_{12}\, u_1 + a_{22}\, v_1 + a_{23} = C_{12} \text{ und}$$
$$a_{13}\, u_1 + a_{23}\, v_1 + a_{33} = C_{13}\,,$$

so lautet die Gleichung, wodurch die vom Schnittpunkte von $u_1 \,|\, v_1$ und $u_2 \,|\, v_2$ ausgehenden Tangenten bestimmt werden, folgendermaßen:

$$C_1 + 2\lambda\,(C_{11}\, u_2 + C_{12}\, v_2 + C_{13}) + \lambda^2\, C_2 = 0.$$

Hieraus entnimmt man, daß die beiden gegebenen Geraden konjugiert sind, wenn

$$C_{11}\, u_2 + C_{12}\, v_2 + C_{13} = 0 \text{ ist.}$$

Zusatz 1. Zu $u_1 \,|\, v_1$ sind alle Geraden konjugiert, die sich aus der Gleichung

$$C_{11}\, u + C_{12}\, v + C_{13} = 0$$

bei veränderlichem u und v berechnen lassen.

Dieselben gehen sämtlich durch den Punkt $\frac{C_{11}}{C_{13}} \,\Big|\, \frac{C_{12}}{C_{13}}$, welcher der Pol von $u_1 \,|\, v_1$ genannt wird.

Zusatz 2. Ist $u_1 = o$, $v_1 = o$, so wird $C_{11} = a_{13}$, $C_{12} = a_{23}$ und $C_{13} = a_{33}$.

Mithin hat die unendlich ferne Gerade der Ebene den Pol $\frac{a_{13}}{a_{33}} \,\Big|\, \frac{a_{23}}{a_{33}}$. Derselbe ist, wie bekannt, der Mittelpunkt des betreffenden Kegelschnittes.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung

$$a_{11}\, u^2 + 2\, a_{12}\, u\, v + a_{22}\, v^2 + 2\, a_{13}\, u + 2\, a_{23}\, v + a_{33} = 0$$

diskutieren.

Auflösung. Man bilde zunächst aus der linken Seite dieser Gleichung, die mit C bezeichnet werde, 3 Quadrate.

Es ist:

$$a_{33}\, C \equiv (a_{13}\, u + a_{23}\, v + a_{33})^2 + (a_{11}\, a_{33} - a_{13}{}^2)\, u^2$$
$$+ 2\,(a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{23})\, u\, v + (a_{22}\, a_{33} - a_{23}{}^2)\, v^2.$$

Setzt man

$$a_{11}\, a_{33} - a_{13}{}^2 = b_1\,,$$
$$a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{23} = b_2\,,$$
$$a_{22}\, a_{33} - a_{23}{}^2 = b_3 \text{ und}$$
$$a_{13}\, u + a_{23}\, v + a_{33} = M^{*})\,,$$

*) $M = o$ ist nach Zus. 2 der vorhergehenden Aufgabe die Gleichung des Mittelpunktes.

so ergiebt sich:

$$a_{33}\, C \equiv M^2 + b_1\, u^2 + 2\, b_2\, u\, v + b_3\, v^2$$

oder

$$a_{33}\, b_1\, C \equiv b_1\, M^2 + (b_1\, u + b_2\, v)^2 + (b_1\, b_3 - b_2^2)\, v^2 \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

I. Es werde nun vorausgesetzt, daß a_{33} nicht null ist.

Man hat dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn b_1 und $b_1\, b_3 - b_2^2$ beide positiv sind, dann stellt $C = 0$ kein reales Gebilde dar; denn wählt man unter diesen Bedingungen für u und v reale Werte, so wird die rechte Seite der obigen Identität niemals null; mithin kann auch C für reale Werte nicht null werden.

2. Wenn $b_1\, b_3 - b_2^2 = 0$*) ist, so ist

$$b_1\, M^2 + (b_1\, u + b_2\, v)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$b_1\, u + b_2\, v = \pm M \sqrt{-b_1}\, .$$

In diesem Falle stellt $C = 0$ ein Punktepaar vor, das real ist, wenn b_1 negativ ist, und das imaginär ist, wenn b_1 positiv ist.

3. Wenn $b_1\, b_3 - b_2^2$ positiv und b_1 negativ ist, so stellt $C = 0$ eine Ellipse dar.

Um dieses einzusehen, bringt man Gleichung I auf die Form:

$$\frac{a_{33}\, C}{M^2} \equiv \frac{1}{b_1} \left(\frac{b_1\, u + b_2\, v}{M}\right)^2 + \frac{b_1\, b_3 - b_2^2}{b_1} \left(\frac{v}{M}\right)^2 + 1\, .$$

Setzt man nun

$$M : a_{33} = M_1\, ,$$

$$\frac{u}{M_1} = u' \text{ und } \frac{v}{M_1} = v', \text{ so erhält man}$$

$$\frac{a_{33}\, C}{M^2} = \frac{1}{b_1\, a_{33}^2}\, (b_1\, u' + b_2\, v')^2 + \frac{b_1\, b_3 - b_2^2}{b_1\, a_{33}^2}\, v'^2 + 1, \quad \ldots \quad (II)$$

wo die neuen Koordinaten auf zwei Axen bezogen sind, die mit den gegebenen parallel laufen und durch das Centrum der Kurve gehen**).

---

*) d. h. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

**) Verschiebt man die Axen des gegebenen Systemes parallel mit sich selbst, so daß der neue Anfangspunkt in das Centrum $\frac{a_{13}}{a_{33}} \,\Big|\, \frac{a_{23}}{a_{33}}$ fällt, so ist nach § 8, Aufgabe 1 für die Koordinaten $u' \mid v'$ im neuen System zu setzen:

$$u' = \frac{u}{\frac{a_{13}}{a_{33}}\, u + \frac{a_{23}}{a_{33}}\, v + 1} = \frac{u}{M_1} \text{ und } v' = \frac{v}{\frac{a_{13}}{a_{33}}\, u + \frac{a_{23}}{a_{33}}\, v + 1} = \frac{v}{M_1}\, .$$

Setzt man ferner

$$b_1 u' + b_2 v' = c_1 \frac{u' \sin(\varphi - \alpha) + v' \sin\alpha}{\sin\varphi},$$

$$v' = c_2 \frac{u' \sin(\varphi - \beta) + v' \sin\beta}{\sin\varphi}, \text{ *)}$$

$$\frac{u' \sin(\varphi - \alpha) + v' \sin\alpha}{\sin\varphi} = U \text{ und}$$

$$\frac{u' \sin(\varphi - \beta) + v' \sin\beta}{\sin\varphi} = V,$$

wo φ der Winkel ist, den die ursprünglichen Axen mit einander bilden, und wo α und β die Winkel sind, welche die Axe der U und V mit der Axe der u' bilden (§ 8, Aufg. 2), so geht Gleichung II über in:

$$\frac{a_{33} C}{M^2} = \frac{c_1^2}{b_1 a_{33}^2} U^2 + \frac{b_1 b_3 - b_2^2}{b_1 a_{33}^2} c_2^2 V^2 + 1.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen sind $\frac{c_1^2}{b_1 a_{33}^2}$ und $\frac{b_1 b_3 - b_2^2}{b_1 a_{33}^2} c_2^2$ negative Zahlen.

Es ist also

positive Zahl mal U^2 + positive Zahl mal $V^2 = 1$.

Diese Gleichung bedeutet aber nach § 14, Aufg. 1, Zusatz eine Ellipse.

4. Wenn $b_1 b_3 - b_2^2$ negativ ist, so bedeutet die Gleichung $C = 0$ bei beliebigem Werte von b_1 eine Hyperbel. Der Beweis ist genau wie bei Nr. 3.

II. Wenn $a_{33} = 0$ ist, so genügen der Gleichung $C = 0$ die Werte $u = 0$, $v = 0$, d. h. die unendlich ferne Gerade berührt die betreffende Kurve.

Diese Eigenschaft besitzt nur die Parabel. Wenn daher in $C = 0$ das absolute Glied fehlt, so liegt eine Parabel vor.

---

*) Aus jeder dieser Identitäten folgert man 2 Gleichungen; es sind also hinreichend viele Gleichungen zur Bestimmung von c_1, α, c_2 und β vorhanden.